

PERIODICA POLYTECHNICA

ELECTRICAL ENGINEERING — ELEKTROTECHNIK

VOL. 2 * NO. 3 * 1958



POLYTECHNICAL UNIVERSITY
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BUDAPEST

PERIODICA POLYTECHNICA

Contributions to international technical sciences published by the Polytechnical University, Budapest (Hungary)

Originalbeiträge zur internationalen technischen Wissenschaft, veröffentlicht von der Technischen Universität, Budapest (Ungarn)

PERIODICA POLYTECHNICA

includes the following series

enthält folgende Serien

Engineering
Electrical Engineering
including Applied Physics
Chemical Engineering

Maschinen- und Bauwesen
Elektrotechnik und angewandte Physik
Chemisches Ingenieurwesen

The issues of each series appear at quarterly intervals

Einzelnummern der genannten Serien erscheinen vierteljährlich

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD — HAUPTSCHRIFTLEITER

Z. CSÜRÖS

EDITORIAL BOARD — SCHRIFTLEITUNG

**I. BARTA, O. BENEDIKT, S. BOREÉLY, L. GILLEMCT, P. GOMBÁS, L. HELLER,
K. P. KOVÁCS, J. PROSZT, G. SCHAY, I. VÖRÖS**

EXECUTIVE EDITOR — SCHRIFTLEITER

J. KLÁR

The rate of subscription to a series is \$ 4,00 a year. For subscription or exchange copies please write to

Jahresabonnement pro Serie : \$ 4,00. Bestellungen und Anträge für Tauschverbindungen sind zu richten an

PERIODICA POLYTECHNICA

BUDAPEST 62, POB 440

DIE BERECHNUNG DER LÄUFERSTÄBE VON STROMVERDRÄNGUNGSMOTOREN

Von

J. RETTER

Lehrstuhl für Elektrische Maschinen und Messungen, der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 5. Mai 1958)

Die Theorie der Stromverdrängung in den in Nuten angeordneten hohen Leitern und der dadurch verursachten zusätzlichen Verluste ist aus der Literatur im allgemeinen bekannt. Die Lösung für die offene Nut mit parallelen Wänden wurde durch A. B. FIELD [1] gegeben. Die elegante, aber außerordentlich knappe Arbeit von FIELD wurde in einer eingehenderen und in ihrer äußeren Form modifizierten Behandlung von EMDE wiederholt [2, 3, 4]. Die für Ingenieure verständliche Ableitung der Formeln von FIELD und EMDE sowie ihre einfache Deutung und der Begriff der kritischen Höhe wurden im Jahre 1913 von ROGOWSKI im »Archiv für Elektrotechnik« gegeben [5]. Im selben Jahrgang hat RICHTER den experimentellen Beweis der FIELDSchen Formeln mitgeteilt [6]. Als Grundlage für die üblichen allgemein bekannten Ausdrücke und Berechnungsmethoden kann der Aufsatz von ROGOWSKI betrachtet werden. Dieser Aufsatz sowie die Abhandlungen von EMDE haben in der deutschen Fachliteratur das weitere Schicksal der Lösung dieser Frage ungefähr bestimmt. Von einigen graphischen Methoden abgesehen ist es der Weg der mathematischen Lösung von Differentialgleichungen, der zu genauen, aber äußerst verwickelten Gleichungen führt, den die Praxis unter der Anwendung von Kurven übernimmt. Durch die Kurven werden in der Regel die Faktoren der Widerstandszunahmen und der Reaktanzabnahmen angegeben.

Die schwerfällige graphische Lösung der Nut von beliebiger Form hat KRÄMER im Jahre 1931 gezeigt [8]. Die Berechnung von zahlreichen Nutformvarianten für Doppelkäfige und Tiefnuten hat im Jahr 1933 SCHUISKY in seinem grundlegenden Artikel gegeben [9]. Die Lösungen sind hierbei in vielen Fällen Näherungen und ergeben recht komplizierte Ausdrücke. Die Ergebnisse wurden nur in einigen stark bedingten Fällen in Kurven aufgetragen. Die mathematische Lösung der trapezförmigen Nut entstand im gleichen Jahr auf Grund der Arbeit von LAIBLE [10], die ebenfalls im »Archiv für Elektrotechnik« erschienen ist. Die Kurven von LAIBLE sind — mitunter verbessert — auch in NÜRNBERGS Buch [21] anzutreffen. Sie wurden für L-förmige Nuten

in mehreren Fällen von Z. LENGYEL und vom Institut für Konstruktion von elektrischen Maschinen (VIFOTI) berechnet [13, 14].

In Ungarn befaßten sich O. RÉTHY [11], D. ÖRLEY und G. JEKEL-FALUSSY [12], L. SZILY [19] sowie das Institut für Konstruktion von elektrischen Maschinen [13] und Z. LENGYEL [14] mit den Doppelkäfigläufermotoren. Die in der Praxis allgemein übliche Behandlung, bei der die eigene Stromverdrängung der einzelnen Käfige im allgemeinen vernachlässigt wird, gehört nicht in den Rahmen dieser Veröffentlichung. Über die Einzelheiten des Arbeitsdiagramms berichtet P. K. KOVÁCS in seinem Werk (Betriebslehre elektrischer Maschinen).

Unter Zugrundelegung der angeführten Abhandlungen ist die Berechnung von vielen in der Praxis angewandten Nutformen noch ungelöst oder stößt auf Schwierigkeiten. *Erstens* ist überhaupt keine Lösung bekannt, z. B. für Nuten, die auch aus Kreisbögen zusammengesetzte Abschnitte enthalten, *zweitens* sind keine zugänglichen Kurven vorhanden, z. B. für die sich nach unten zu verzüngende Trapezform und für die beliebigen Verhältnisse der Höhe zur Breite bei L-förmigen Nuten, *drittens* enthalten die bekannten und benutzten Lösungen derartig zwangsmäßige, oft unzulässige Vernachlässigungen, z. B. beim gewöhnlichen oder gegossenen Doppelkäfigstab, wobei die eigene Stromverdrängung der unteren und oberen Stäbe oder die Wirkung des Streusteges zwischen den beiden Käfigen unbeachtet bleibt. Außerdem verschwindet bei der Anwendung der Kurven und in den außerordentlich verwickelten Formeln das *physikalische Bild* gänzlich und somit besitzt man bei der Berechnung keinen einfachen richtunggebenden, anschaulichen Stützpunkt, der die Übersicht der qualitativen Verhältnisse ermöglichen würde, denn abgesehen von den einfachsten Formen wird das durch die große Zahl der Veränderlichen unmöglich gemacht.

Schließlich besteht außer der langwierige und schwerfällige Methode KRÄMERS nach Kenntnis des Verfassers kein einziges einfaches Verfahren, mit dessen Hilfe man die Stromverteilung der Nut feststellen könnte, obwohl dies hinsichtlich der Bestimmung der Anlaßerwärmung von großer Bedeutung ist.

Einzelheiten des unten beschriebenen, für sehr viele Fälle anwendbaren, *einheitlichen* und *äußerst einfachen* Verfahrens kann man in der amerikanischen Fachliteratur aus den Jahren 1951–1953 verstreut finden [15, 16]. Allerdings wird darin meistens nur je eine Formationsgruppe behandelt, wobei mehrere (in vorliegender Abhandlung im weiteren erörterte) Nutformen, die Festlegung eines allgemeinen Berechnungsprinzips sowie die Systematisierung fehlen bzw. vernachlässigt werden. Ebenso wenig wird die Berechnung der Stromverteilung besprochen.

Das Grundprinzip des nachstehenden Verfahrens besteht darin, daß die Berechnung der Nuten auf die stark entwickelte Theorie der Leitungen zurückgeführt wird und die dabei üblichen Methoden Anwendung finden. Somit

gelangt dieses Verfahren zu auffallend einfachen Ausdrücken und zu einer halbgraphischen Berechnungsweise, die für die verschiedensten Stromverdrängungsformen völlig einheitlich sein kann. Sie eignet sich sowohl zur Bestimmung der Impedanz als auch der Stromverteilung. Die in der Theorie der Leitungen gut entwickelten Diagramme der komplexen Hyperbelfunktionen werden weitgehend benutzt. In Form der vorlaufenden und reflektierten Wellen stützt sich das Verfahren auf ein anschauliches und das Denken sehr erleichterndes physikalisches Bild, in der Ersatzschaltung hingegen auf eine einfache Berechnungsgrundlage. Ein weiterer Ausbau und eine Bereicherung des Verfahrens wird durch die sich in unseren Tagen stürmisch entwickelnde Mikrowellentechnik ermöglicht.

Doch muß bemerkt werden, daß — wie aus dem Folgenden erhellt — die Theorie der Leitungen lediglich zur Weiterentwicklung bzw. tiefergründigeren Erwägung des Verfahrens notwendig ist, nicht aber zu seinem praktischen Gebrauch. Unter der formalen Anwendung der Beziehungen in den gezeigten Beispielen läßt sich die Berechnung in beliebigen Fällen ohne jede Schwierigkeit durchführen, selbst wenn man die als Grundlage des Verfahrens dienende Theorie der Leitungen nicht kennt.

I. Die Berechnung der Impedanz

Für den Strom und die Spannung eines Leiters von beliebigem Querschnitt, der in die Nut genau eingepaßt wurde, gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{c}{\varrho l} u \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu_0 \frac{l}{c} \frac{\partial i}{\partial t}$$

(vgl. genaue Anführung im Fachschrifttum [1–5, 10, 15] usw.).

Für zeitlich sinusförmig veränderlichen Größen kann man anschreiben:

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} = \frac{c}{\varrho l} \mathbf{U} \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = j\omega \mu_0 \frac{l}{c} \mathbf{I}$$

Diese Differentialgleichungen weisen mit den Differentialgleichungen der Leitungen [17, 561]

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} = \mathbf{y} \mathbf{U} \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{z} \mathbf{I}$$

eine vollständige Ähnlichkeit hinsichtlich ihrer Form auf.

Die Analogie ermöglicht, daß viele Aufgaben unter Anwendung der gut ausgearbeiteten Theorie der Leitungen lösbar sind und daß man mit Hilfe der anschaulicheren Bilder der Leitungen zu denken vermag.

Aus dem Vergleich geht klar hervor, daß bei in Nuten untergebrachten Leitern die Ausdrücke

$$z = j \omega \mu_0 \frac{l}{c}, \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{c}{\varrho l}$$

der spezifischen Längsimpedanz der Fernleitung bzw. ihrer spezifischen Querschnittsimpedanz entsprechen. z ist die Reaktanz der Einheitshöhe der Nut (oder der Stabes), $1/y$ bedeutet den Widerstand ihrer Einheitshöhe.

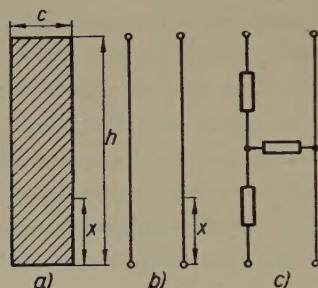


Abb. 1

Entsprechend der Ähnlichkeit soll in der Folge

$$\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{j \frac{\omega \mu_0}{\varrho}}$$

bzw.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{j \omega \mu_0 \varrho} \frac{l}{c}$$

sein. Man kann das γ relative Übertragungsmaß (Fortpflanzungsmaß oder Fortpflanzungskonstante) der Nut, γh das Übertragungsmaß der Nut, Z_0 die charakteristische Impedanz (Widerstand) der Nut, den reellen bzw. imaginären Teil des Übertragungsmaßes $g = \gamma h = ah + j\beta h = a + j\beta$ die Dämpfung bzw. Winkelmaß (Phasendrehung), a und β relative Dämpfung (Dämpfungskonstante oder Dämpfungsbelag) und relatives Winkelmaß (Phasenkonstante oder Phasenbelag) der Nut oder des Stabes nennen.

A) Der rechteckige Stab

In obigen Ausdrücken können sowohl ϱ als auch c Funktionen der Höhe x sein. Der spezifische Widerstand ϱ ändert sich in der Praxis höchstens je Abschnitt und ist innerhalb eines Abschnittes konstant. Diese Änderung von

ϱ läßt sich durch sinngemäße Anwendung der späteren Feststellungen leicht berücksichtigen. Deshalb wird in der Folge angenommen, daß $\varrho = \text{konstant}$ ist.

Bei der Nut mit parallelen Wänden (Abb. 1) ist auch c konstant und entspricht völlig der homogenen Leitung [17, Kap. IX]. In der Folge kann man

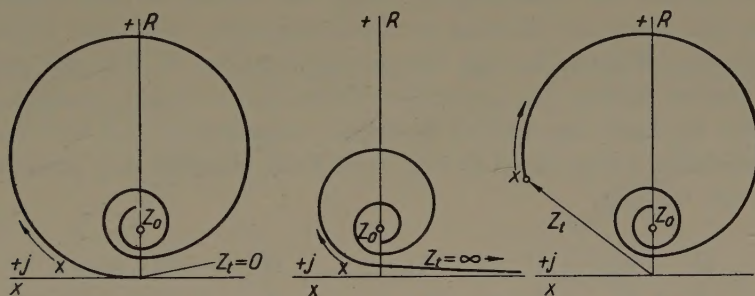


Abb. 2

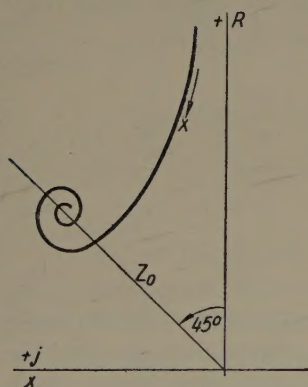


Abb. 3

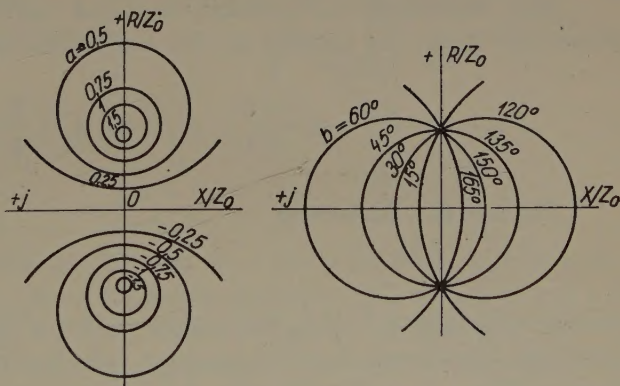


Abb. 4

auch die Berechnung der Impedanz von Rechteckleitern von der Theorie der Leitungen übernehmen. Die Änderung der Eingangsimpedanz einer kurzgeschlossenen, im Leerlauf befindlichen bzw. mit einer beliebigen Impedanz Z_t belasteten homogenen Leitung mit Verlust ist — für den Fall einer reellen charakteristischen Impedanz — in Funktion der Länge der Abb. 2 zu entnehmen.

Setzt man die Höhe des in der Nut gebetteten Leiters auf Null herab, so steigt sein Widerstand bis ins Unendliche, indessen seine Reaktanz auf Null sinkt. Er ist also der Leerlaufleitung äquivalent und seine Impedanz ändert sich über der Höhe ebenso wie die in Abb. 3. In Abb. 1b wurde neben dem Leiter auch die homogene Leerlaufleitung symbolisch eingetragen. Falls uns nur die Gesamtimpedanz des Nutabschnitts interessiert, kann diese Abb. 1c gemäß durch die äquivalente T-Schaltung ersetzt werden. Der Phasenwinkel

der charakteristischen Impedanz des Leiters beträgt 45° und ist induktiven Charakters.

Die Impedanz der homogenen Leitung ist an einer beliebigen Stelle das Verhältnis der dort auftretenden Spannung zum dort herrschenden Strom. Man kann sowohl die Spannung als auch den Strom als die Summe einer sich gegen das Ende der Leitung zu fortbewegenden und einer reflektierten Welle auffassen. Werden die sich vorwärtsbewegenden Wellen mit positivem, die reflektierten Wellen mit negativem Vorzeichen versehen, sodann alle mit Werten, die am Ende des Leiters bestehen, ausgedrückt und wird außerdem die veränderliche Länge der Leitung, vom Ende der Leitung gerechnet, mit x bezeichnet, so folgt:

$$Z = \frac{U^+ + U^-}{I^+ + I^-} = \frac{U_e^+ e^{\gamma x} + U_e^- e^{-\gamma x}}{I_e^+ e^{\gamma x} + I_e^- e^{-\gamma x}} = \frac{U_e^+}{I_e^+} \frac{1 + (U_e^-/U_e^+) e^{-2\gamma x}}{1 + (I_e^-/I_e^+) e^{-2\gamma x}}$$

Das Verhältnis der reflektierten und anfallenden Spannungen bzw. Ströme am Ende der Leitung ist der Reflexionsfaktor [17, 575]:

$$r_e = \frac{U_e^-}{U_e^+}, \quad r_e = -\frac{I_e^-}{I_e^+}.$$

Die mit der Beziehung

$$r_e = -e^{-2\epsilon}$$

definierte komplexe Zahl g_e kann man als das »Übertragungsmaß« der Lastimpedanz bezeichnen. Somit kann man mit der Verallgemeinerung des Reflexionsfaktors bzw. des Begriffs des Übertragungsmaßes den Wert

$$r = -e^{-2(\gamma x + g_e)}$$

den auf einen beliebigen Punkt x der Leitung bezogenen Reflexionsfaktor, die komplexe Zahl

$$g_b = a_b + j b_b = \gamma x + g_e$$

hingegen das Gesamt- oder Eingangsübertragungsmaß der Last und der Leitung nennen. a_b bezeichnet die Gesamtdämpfung — Eingangsdämpfung — b_b hingegen die Gesamtphasendrehung — Eingangsphasendrehung.

Daraus folgt unter Berücksichtigung von $U_e^+/I_e^+ = Z_0$:

$$Z = Z_0 \frac{1 + r}{1 - r} = Z_0 \frac{1 - e^{-2g_b}}{1 + e^{-2g_b}} = Z_0 \operatorname{th} g_b.$$

Die Beziehung $Z = Z_0 \operatorname{th} g_b$ ist die Grundlage für unsere weiteren Berechnungen. Der auf die charakteristische Impedanz bezogene (»normalisierte«) Wert der Impedanz

$$\frac{Z}{Z_0} = \operatorname{th} g_b$$

kann am einfachsten dem th -Diagramm — dem bipolaren Kreisdiagramm — entnommen werden.

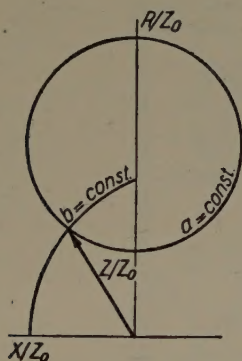


Abb. 5

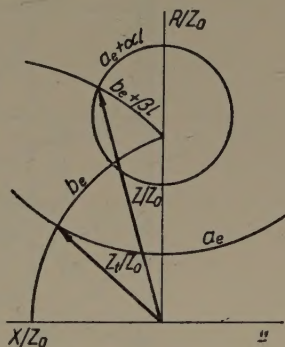


Abb. 6

Die im Diagramm mit den Werten $a_b = \text{konstant}$ bzw. $b_b = \text{konstant}$ gekennzeichneten Kurven (deren Ableitung unter [18,187] zu finden ist) sind Kreise, deren Mittelpunkte auf den Achsen R/Z_0 bzw. X/Z_0 liegen (Abb. 5). Das Diagramm wird folgendermaßen angewandt: Bei einer kurzgeschlossenen Leitung ist der Reflexionsfaktor am Ende der Leitung $r_e = -1$ und somit wird $g_e = 0$ sein, es gilt also: $g_b = g = \gamma x = ax + j\beta x = a + jb$. Entsprechend wird die Eingangsimpedanz einer kurzgeschlossenen Leitung von der Länge l durch den Schnittpunkt der Kreise $al = \text{konst.}$ und $\beta l = \text{konst.}$ bestimmt (Abb. 5). Ist die Leitung nicht kurzgeschlossen, sondern wurde sie an irgendeine Lastimpedanz Z_l gelegt, so sucht man im Diagramm den zu Z_l beigeordneten Punkt aus und liest die ihm zugehörigen Werte a_e und b_e ab (Abb. 6). Die Eingangsimpedanz kann beim Schnittpunkt der Kreise $a_e + al = \text{konst.}$ und $b_e + \beta l = \text{konst.}$ gewonnen werden.

Der uns interessierende Reflexionsfaktor der leerlaufenden Leitung ist am Leitungsende $r_e = 1$. Aus der Beziehung

$$1 = e^{-2a_e} e^{-j2b_e}$$

folgt:

$$a_e = 0 \quad \text{und} \quad b_e = 90^\circ.$$

Es gilt also :

$$\frac{Z}{Z_0} = \text{th}(\gamma x + j\pi/2).$$

Die Impedanz Z/Z_0 des Rechteckstabes, die auf die charakteristische Impedanz bezogen wurde, läßt sich also in einer beliebigen Höhe x im Diagramm in dem Punkt finden, der durch die Werte ax und $\pi/2 + \beta x$ gekennzeichnet ist. Wäre die charakteristische Impedanz reell, so würden die Dia-

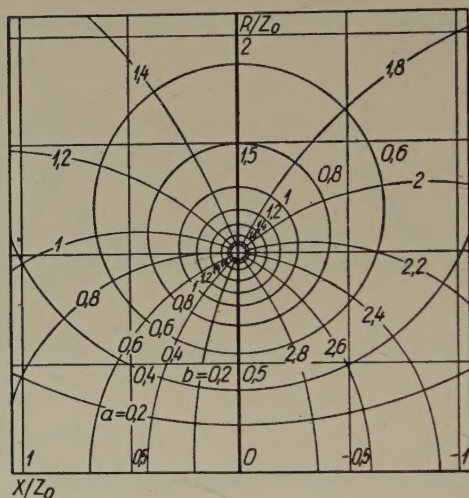


Abb. 7

gramme Z/Z_0 auch die Änderung der Nutimpedanz in Abhängigkeit der Höhe zeigen. Da aber der Phasenwinkel der charakteristischen Impedanz der Nut 45° beträgt, erscheint die Abbildung $Z(x)$ auf dem Diagramm Z/Z_0 um das Verhältnis Z/Z_0 verändert und um 45° gedreht.

Zu der wie vorstehend berechneten Impedanz ist auch die Reaktanz der Nutöffnung

$$X_0 = j\omega L_0$$

zu addieren. L_0 ist die der magnetischen Leitfähigkeit der Nutöffnung entsprechende Induktivität. Im weiteren wird die Berechnung der Reaktanz der Nutöffnung, außer acht gelassen, da ihre Berücksichtigung mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

Das gesamte th -Diagramm wurde in Abb. 7 eingetragen. Um die Berechnung bequemer zu gestalten, wurde b nicht in Graden, sondern in Radianen angegeben. Die nachstehenden Beispiele wurden naturgemäß mit Hilfe von

bedeutend größeren Diagrammen mit dichteren Unterteilungen zusammengestellt.

Beispiel 1. Die Angaben eines Rechteckstabes sind :

$$h = 30 \text{ mm}, c = 3 \text{ mm}, l = 0,1 \text{ m}, \varrho = 0,02 \text{ ohm mm}^2 \text{ m}^{-1}, f = 50 \text{ s}^{-1}.$$

Die Fortpflanzungskonstante und die charakteristische Impedanz des Stabes sind mit diesen Angaben bei den Schlüpfen von $s = 1$ und $s = 0,25$

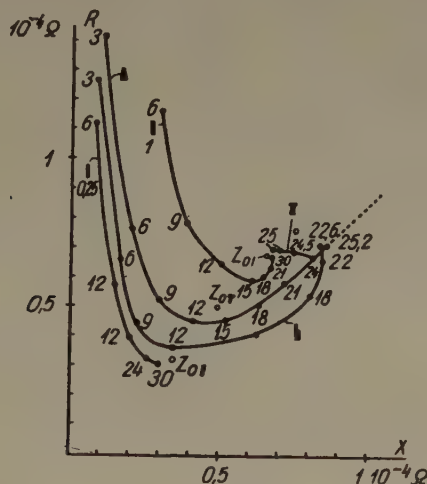


Abb. 8

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= 0,0993 + j 0,0993 \text{ mm}^{-1} \\ Z_0 &= (0,662 + j 0,662) 10^{-4} \Omega \\ \gamma &= 0,0496 + j 0,0496 \text{ mm}^{-1} \\ Z_0 &= (0,331 + j 0,331) 10^{-4} \Omega \end{aligned} \right\}$$

Widerstand und Reaktanz des Stabes sind bei gleichmäßiger Stromverteilung :

$$R_g = 0,222 \cdot 10^{-4} \Omega, \quad X_g = 1,315 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Die Berechnung der Impedanz des Stabes in verschiedenen Höhen kann für die angeführten beiden Schlupfwerte den Tab. I und II, die Änderung der Impedanz in Abhängigkeit von der Höhe für die beiden Fälle der Abb. 8 entnommen werden. Im allgemeinen wird nur die Impedanz des ganzen Leiters benötigt, nicht aber ihre Änderung in Abhängigkeit der Höhe. Letztere wurde an dieser Stelle lediglich im Interesse einer besseren Übersicht der Verhältnisse

und eines Vergleichs der einzelnen Stabformen gezeigt. Die einzelnen Schritte der Berechnung der Gesamtimpedanz wurden in allen Tabellen hervorgehoben. Um die gewohnte Funktionsdarstellung in der Abbildung beizubehalten, wurde die induktive Reaktanz nicht wie üblich (vgl. mit [22,244]), sondern davon abweichend, also nicht links, sondern rechts angegeben.

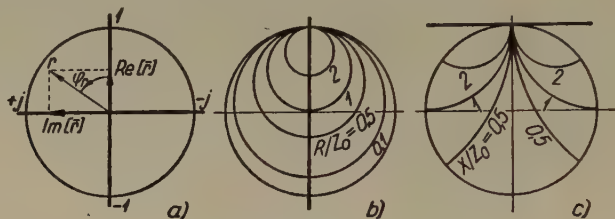


Abb. 9

Die Impedanz des ganzen Stabes beträgt bei $s = 1$, $Z = (0,669 + j 0,671) \cdot 10^{-4} \Omega$, die Widerstandszunahme bzw. die Reaktanzabnahme betragen also $k_r = 3,01$ und $k_x = 0,511$. Die gleichen Werte ergeben sich

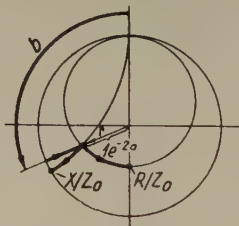


Abb. 10

unter Zugrundelegung der Diagramme NÜRNBERGS (vgl. mit [21,220]) beim Wert $\xi = 2,96$, zu $k_r = 2,99$ und $k_x = 0,513$. Auf den Schlupf $s = 0,25$ bezogen gilt: $k_r = 1,367$ bzw. $k_x = 0,898$, während wiederum auf Grund der NÜRNBERGSchen Diagramme $k_r = 1,37$ bzw. $k_x = 0,892$.

In Gegenüberstellung zu den bisherigen erfordert die Anwendung des SMITHschen Diagramms etwas mehr Berechnungsarbeit und ist auch etwas umständlicher. Dank seiner außerordentlichen Verbreitung aber ist es in einem genügend großen Exemplar leichter zugänglich.

Durch das SMITHsche Diagramm wird ebenfalls ein Zusammenhang zwischen r und Z/Z_0 dargestellt. r kann dem Diagramm in orthogonalen oder polaren Koordinaten entnommen werden (Abb. 9a). Die Kurven $R/Z_0 = \text{konst.}$ und $X/Z_0 = \text{konst.}$ sind Kreise; die Mittelpunkte der ersten liegen auf der reellen Achse und die Kreise gehen durch den Punkt $+1$ hindurch (Abb. 9b), während sich die Mittelpunkte der letzteren auf der Horizontalen, die zum Punkt $+1$ gezogen wurde, befinden. Im Diagramm ist der Bereich,

Tabelle I

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | $\gamma x + j 1,57$ | $s = 1$ | |
|-----------------------|---------------------|-------------------|--------------------|
| | | Z/Z_0 | $Z/10^{-4} \Omega$ |
| 3 | $0,296 + j 1,866$ | $1,8 - j 1,58$ | $2,237 + j 0,145$ |
| 6 | $0,596 + j 2,166$ | $1,1 - j 0,65$ | $1,158 + j 0,298$ |
| 9 | $0,894 + j 2,464$ | $0,885 - j 0,297$ | $0,783 + j 0,389$ |
| 12 | $1,191 + j 2,761$ | $0,87 - j 0,11$ | $0,649 + j 0,503$ |
| 15 | $1,49 + j 3,06$ | $0,905 - j 0,012$ | $0,588 + j 0,604$ |
| 18 | $1,787 + j 0,217$ | $0,95 + j 0,025$ | $0,602 + j 0,646$ |
| 21 | $2,084 + j 0,514$ | $0,988 + j 0,026$ | $0,638 + j 0,67$ |
| 24 | $2,387 + j 0,812$ | $1 + j 0,017$ | $0,651 + j 0,673$ |
| 27 | $2,681 + j 1,111$ | $1,01 + j 0,012$ | $0,66 + j 0,676$ |
| 30 | $2,96 + j 1,39$ | $1,012 + j 0,002$ | $0,669 + j 0,671$ |

Tabelle II

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | $s = 0,25$ | |
|-----------------------|-------------------|--------------------|
| | Z/Z_0 | $Z/10^{-4} \Omega$ |
| 3 | | |
| 6 | $1,8 - j 1,58$ | $1,119 + j 0,073$ |
| 9 | | |
| 12 | $1,1 - j 0,65$ | $0,579 + j 0,149$ |
| 15 | | |
| 18 | $0,885 - j 0,297$ | $0,391 + j 0,195$ |
| 21 | | |
| 24 | $0,87 - j 0,11$ | $0,324 + j 0,252$ |
| 27 | | |
| 30 | $0,905 - j 0,012$ | $0,3035 + j 0,295$ |

der innerhalb des Kreises vom Halbmesser $r = 1$ liegt zu sehen. Die Werte $R/Z_0 = \text{konst.}$ können längs der vertikalen Achse, die durch den Mittelpunkt hindurchgeht, die Zahlenwerte $X/Z_0 = \text{konst.}$ längs des Kreises $r = 1$ abgelesen werden. An der Außenseite des Kreises $r = 1$ ist eine b_b entsprechende Gradeinteilung gezeigt. Man kann also hier den Winkel von r suchen. Die Koordinaten von r sind im Diagramm nicht eingetragen. Der Vektor von r wird vom Benutzer des Diagramms von Fall zu Fall eingezeichnet.

Bei gegebenem Wert g_b bestimmt man die Werte R/Z_0 bzw. X/Z_0 derart, daß der Endpunkt des Vektors

$$\mathbf{r} = -e^{-2a_b} e^{-j2b_b}$$

B) L- und T-förmige Stäbe

Die L-förmige (Abb. 11a) und die T-förmige Nut (elektrisch betrachtet sind beide äquivalent) entsprechen der Hintereinanderschaltung zweier homogener Leitungen von verschiedenen charakteristischen Impedanzen (Abb. 11b, c), also einer aus homogenen Abschnitten bestehenden zusammengesetzten Leitung. Die Lastimpedanz der zweiten Leitung ist gleich der Eingangsimpedanz der ersten. Der Verlauf der Berechnung ist also folgender: die bezogene Impedanz des unteren Nutbereiches wird, wie vorstehend gezeigt, abgelesen. Diese ist die Lastimpedanz des oberen Nutabschnittes. Da aber im Diagramm die auf die charakteristischen Impedanzen bezogenen Werte eingetragen sind, wird die Größe der hier gemessenen Impedanz im Verhältnis zu den charakteristischen Impedanz der beiden Abschnitte — da ihre Phasenwinkel gleich sind — einfach im Verhältnis der Absolutwerte umgerechnet. Wenn man die den so gewonnenen, normierten Impedanzen beigeordneten Werte a_1 bzw. b_1 um die Werte $\alpha_2 h_2$ und $\beta_2 h_2$ des oberen Nutabschnittes erhöht, kann der bezogene Wert der gesamten Nutimpedanz abgelesen werden.

Im Institut für Konstruktion von elektrischen Maschinen (VIFOTI) wurden die Diagramme der Widerstandszunahmen bzw. der Reaktanzabnahmen der L- bzw. T-förmigen Nuten für einige Werte h_1/h_2 unter Zugrundelegung der Abhandlungen von SCHUISKY berechnet und in Diagramme eingetragen (vgl. mit [13, 14]). Für andere Höhenverhältnisse müßte man aber die äußerst verwickelten Formeln von SCHUISKY [9] anwenden. Die Impedanz läßt sich mit Hilfe des obigen Verfahrens für beliebige Formen in einigen Minuten berechnen, besonders, wenn man sich eines komplexen Rechnenschiebers bedient.

Beispiel 3. Man errechne die Impedanz einer L-förmigen Nut, deren Widerstand und Reaktanz bei gleichmäßiger Stromverteilung denen des Stabes im vorstehenden Beispiel gleich sind und zeichne die Impedanzänderung über der Höhe ein. Es soll bemerkt werden, daß vorliegender Artikel lediglich die Berechnungsmethode mitteilt und die einzelnen Stabformen bzw. die richtige Grundlage des Vergleiches weder zu vergleichen noch zu besprechen wünscht.

Aus der Gleichheit der Reaktanzen ergibt sich:

$$1,315 \cdot 10^{-4} \Omega = 2 \pi f \mu_0 \frac{h l}{3 c_2} p(\beta, \gamma),$$

wobei $p(\beta, \gamma)$ ein von den Verhältniszahlen $\beta = c_2/c_1$ und $\gamma = h_2/h_1$ abhängiger Faktor ist [14, 70]. Es sollen die Beziehungen $\beta = 0,5$ und $\gamma = 1$ bestehen. Für diese gilt laut Diagramm von LENGYEL: $p(\beta, \gamma) = 1,17$. Nach dem Einsetzen folgt:

$$\frac{h}{c_2} = 8,54.$$

Andererseits kann man auf Grund der Gleichheit der Widerstände anschreiben :

$$90 \text{ mm}^2 = c_2 h \frac{1 + \beta \gamma}{\beta (1 + \gamma)},$$

woraus

$$c_2 h = 60 \text{ mm}^2.$$

resultiert.

Aus den beiden Zusammenhängen ergeben sich : $c_2 = 2,56 \text{ mm}$, $c_1 = 5,12 \text{ mm}$, $h = 22,6 \text{ mm}$, $h_2 = h_1 = 11,3 \text{ mm}$.

Die Konstante des Übertragungsmaßes ist die gleiche wie im vorherigen Beispiel, die charakteristischen Impedanzen der einzelnen Abschnitte sind

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= (0,375 + j 0,375) \cdot 10^{-4} \Omega \\ Z_{02} &= (0,75 + j 0,75) \cdot 10^{-4} \Omega \end{aligned} \right\}$$

Der Verlauf der Berechnung und die Änderung der Impedanz können der Tab. III bzw. Abb. 8 entnommen werden.

Die Gesamtimpedanz der Nut beläuft sich auf :

$$Z = (0,715 + j 0,839) \cdot 10^{-4} \Omega$$

somit gilt :

$$k_r = 3,22 \quad k_x = 0,637$$

Nach den Diagrammen von LENGYEL gehören zum Wert $\xi = a h = 0,637$

$$k_r = 3,3 \quad k_x = 0,64.$$

C) *Der gegossene (aus Rechteckstababschnitten bestehende) Doppelkäftigstab*

Dieser Stab entspricht einer aus mehreren homogenen Abschnitten bestehenden zusammengesetzten Leitung und seine Berechnung erfolgt ebenso wie die der L- oder T-förmigen Stäbe. Bei der Berechnung sind lediglich mehr Schritte zu verzeichnen. Auf diese Art können auch die eigenen Stromverdrängungen der einzelnen Käfige berücksichtigt werden. Diese Ausführung ist bekanntlich [9] einfacher und betriebssicherer als der Käfig mit zwei gesondert angeordneten Stäben. Die aus einem Stück ausgeführte Konstruk-

tion gestattet eine größere Anlaßerwärmung. Die Wärmeabgabe des äußeren Stabes wird durch den mit Metall ausgegossenen Schlitz erleichtert.

Die Stabgestalt laut Abb. 12 ist nicht üblich, die Stäbe des äußeren Käfigs besitzen in der Regel einen Kreisquerschnitt. Man kann auch diese Form in der vorherigen Weise berechnen, wenn der obere Stab mit Kreisquerschnitt näherungsweise durch einen Stab mit Rechteckquerschnitt ersetzt

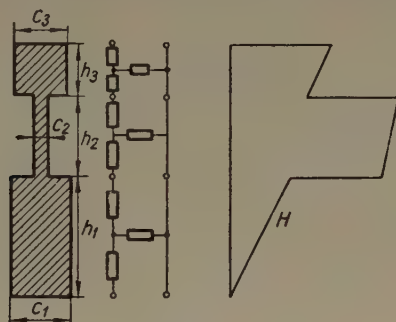


Abb. 12

wird. Die Berechnung der Stäbe mit Kreisquerschnitt oder mit Querschnitten, die Kreislöcher enthalten bzw. von beliebiger Form soll später besprochen werden. Der untere Stab des gegossenen Käfigs ist gegenüber dem gezeichneten Stab abgerundet und manchmal trapezartig. Die erste Form kann durch einen Rechteckquerschnitt ersetzt werden, kann also auf diesen zurückgeführt oder im Sinne unserer Späteren Erörterungen berücksichtigt werden. Die Berech-

Tabelle III

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | $\gamma x + j 1,57$ | Z/Z_0 | $Z/10^{-4} \Omega$ |
|-----------------------|---------------------|--|--------------------|
| 3 | $0,296 + j 1,866$ | $1,8 - j 1,58$ | $1,267 + j 0,083$ |
| 6 | $0,596 + j 2,166$ | $1,1 - j 0,65$ | $0,656 + j 0,168$ |
| 9 | $0,894 + j 2,464$ | $0,885 - j 0,297$ | $0,433 + j 0,221$ |
| 11,3 | $1,122 + j 2,692$ | $\rightarrow 0,866 - j 0,146$ | $0,3798 + j 0,27$ |
| 11,3 | $0,452 + j 3,042$ | \downarrow $\leftarrow 0,433 - j 0,073$ | $0,3798 + j 0,27$ |
| 12 | $0,511 + j 3,1115$ | $0,47 - j 0,015$ | $0,364 + j 0,342$ |
| 13,5 | $0,660 + j 0,12$ | $0,585 + j 0,077$ | $0,381 + j 0,497$ |
| 15 | $0,809 + j 0,269$ | $0,695 + j 0,145$ | $0,412 + j 0,63$ |
| 18 | $1,105 + j 0,565$ | $0,896 + j 0,18$ | $0,537 + j 0,807$ |
| 21 | $1,401 + j 0,861$ | $1,01 + j 0,12$ | $0,668 + j 0,848$ |
| 22,6 | $1,560 + j 1,020$ | $1,036 + j 0,082$ | $0,715 + j 0,839$ |

Die der gleichmäßigen Stromverteilung beigeordnete Reaktanz kann mit Hilfe der Beziehungen

$$\lambda_N = \mu_0 \int_V \left(\frac{H}{i} \right)^2 dv \quad X_g = \omega l \lambda_N$$

berechnet werden [7 oder 9]. Hierbei bezeichnet v den Rauminhalt.

Tabelle IV

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | $\gamma x + j \pi/2$ | Z/Z_0 | $Z/10^{-4} \Omega$ |
|-----------------------|----------------------|------------------------|--------------------|
| 5 | 0,53 + j 2,1 | 1,13 - j 0,775 | 1,065 + j 0,199 |
| 10 | 1,06 + j 2,63 | 0,865 - j 0,18 | 0,584 + j 0,383 |
| 15 | 1,59 + j 0,02 | 0,922 + j 0,004 | 0,513 + j 0,517 |
| 17,5 | 1,855 + j 0,285 | 0,96 + j 0,025 | 0,522 + j 0,550 |
| 17,5 | 0,435 + j 0,0125 ← | ↓ -0,408 + j 0,0106 | |
| 19,5 | 0,647 + j 0,224 | 0,594 + j 0,155 | 0,581 + j 0,983 |
| 21,5 | 0,859 + j 0,4365 | 0,768 + j 0,217 | 0,725 + j 1,295 |
| 23,5 | 1,071 + j 0,648 | 0,917 + j 0,206 | 0,935 + j 1,477 |
| 24,7 | 1,198 + j 0,7755 | 0,965 + j 0,177 | 1,034 + j 1,500 |
| 24,7 | 0,445 + j 1,477 ← | ↓ -2,31 + j 0,416 | |
| 25,7 | 0,551 + j 1,583 | 1,95 - j 0,035 | 1,067 + j 1,113 |
| 26,7 | 0,657 + j 1,689 | 1,685 - j 0,235 | 1,073 + j 0,811 |
| 28,7 | 0,869 + j 1,901 | 1,289 - j 0,29 | 0,88 + j 0,568 |
| 29,6 | 0,964 + j 1,996 | 1,18 - j 0,26 | 0,804 + j 0,515 |

Die magnetische Feldstärke beträgt unter Zugrundelegung ihrer Änderung laut Abb. 12

$$\lambda_N = \frac{\mu_0}{A^2} \left[\frac{h_1^3}{3} c_1 + \frac{F_2}{c_2} \left(\frac{A_2^2}{3} + A_1 A_2 + A_1^2 \right) + \frac{h_3}{c_3} \left(A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 + \frac{A_3^2}{3} + A_1 A_3 + A_2 A_3 \right) \right] = 4,31 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ s m}^{-1}.$$

In den Ausdrücken bedeuten A_1, A_2, A_3 bzw. A den Querschnitt der einzelnen Stababschnitte bzw. des ganzen Stabes.

Somit ist die Widerstandzunahme und Reaktanzabnahme des ganzen Stabes

$$X_g = \omega l \lambda_N = 1,625 \cdot 10^{-4} \Omega$$

es gilt also :

$$\left. \begin{aligned} k_r &= \frac{0,793}{0,2073} = 3,824 \\ k_x &= \frac{0,503}{1,625} = 0,3095. \end{aligned} \right\}$$

In seiner grundlegenden Abhandlung berechnet SCHUISKY den Doppelkäfigstab in drei verschiedenen Varianten. Er untersucht den aus zwei gesondert angeordneten Stäben bestehenden Käfig zuerst unter Vernachlässigung der eigenen Stromverdrängungen der Stäbe (ideeller Doppelkäfig), sodann mit Berücksichtigung der Streuungen der Stäbe (reeller Doppelkäfig) mit

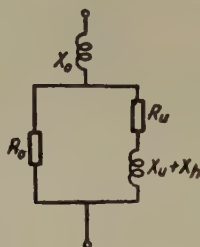


Abb. 14

Rechteckstäben von gleicher Breite. Er beachtet beim gegossenen Doppelkäfig die Wirkung des Streusteges, vernachlässigt aber hierbei wiederum die eigenen Stromverdrängungen der Käfige. Für den obigen Fall sind alle drei Varianten nur näherungsweise gültig.

Bei dem gegossenen Käfig im Beispiel ergeben sich mit den Formeln von SCHUISKY (43 und 44) die Werte :

$$k_r = 3,397 \quad k_x = 0,2777$$

Es ist offensichtlich, daß schon die Vernachlässigung der eigenen Stromverdrängungen der Käfige von verhältnismäßig geringer Höhe einen beachtenswerten Fehler verursacht.

Werden nicht die Stromverdrängungen der einzelnen Käfige vernachlässigt, sondern die Wirkung des Steges, so gewinnt man für den »reellen Doppelkäfig« mit Hilfe der Formeln (36) und (39) von SCHUISKY mit den Werten $X = 0,558 \cdot 10^{-4} \Omega$, bzw. $X_g = 2,11 \cdot 10^{-4} \Omega$ die Ergebnisse :

$$k_r = 4,04 \quad k_x = 0,264$$

Auf Grund der in der Praxis üblichen Ersatzschaltung in Abb. 14 (wobei X_u bzw. R_u die Reaktanz bzw. den Widerstand des unteren, X_o bzw. R_o den des oberen Stabes, X_h hingegen die Reaktanz des Halses bedeuten) gilt:

$$\left. \begin{aligned} X_o &= 0,193 \cdot 10^{-4} \Omega \\ X_h &= 2 \cdot 10^{-4} \Omega \\ X_u &= 0,691 \cdot 10^{-4} \Omega \\ R_u &= 0,279 \cdot 10^{-4} \Omega \\ R_o &= 0,995 \cdot 10^{-4} \Omega \end{aligned} \right\}$$

Mit diesen Werten folgt:

$$Z = \frac{[R_u + j(X_h + X_u)] R_o}{R_u + j(X_h + X_u)} + j X_o = (0,853 + j 0,495) \cdot 10^{-4} \Omega$$

man kann also anschreiben:

$$k_r = \frac{0,853}{0,2073} = 4,11 \quad k_x = \frac{0,495}{1,625} = 0,305.$$

D) Der Doppelküfig (aus Rechteckabschnitten bestehender und aus geteilten Stäben zusammengesetzter Doppelküfig)

Die Berechnung der Impedanz des Stabes ergibt sich unmittelbar bei sinngemäßer Anwendung der bisherigen Ausführungen unter Zugrundelegung der Ersatzschaltung laut Abb. 15. Die Lastimpedanz der den oberen Stab

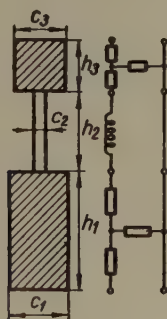


Abb. 15

ersetzenden Leitung ist diesmal die Summe der Eingangsimpedanz des unteren Stabes und der Reaktanz des Streusteges. Die Berechnung verläuft wie folgt: in der vorher bekanntgegebenen Weise wird die Gesamtimpedanz des

unteren Stabes ermittelt. Hierzu addiert man die Reaktanz des Steges. Die so gewonnene Impedanz wird auf die charakteristische Impedanz des oberen

Tabelle V

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | $\gamma \times + j \pi/2$ | Z/Z_0 | $Z/10^{-4} \Omega$ |
|-----------------------|---------------------------|-----------------|--------------------|
| 5 | 0,53 + j 2,1 | 1,15 - j 0,775 | 1,065 + j 0,199 |
| 10 | 1,06 + j 2,63 | 0,865 - j 0,18 | 0,584 + j 0,383 |
| 15 | 1,59 + j 0,02 | 0,922 + j 0,004 | 0,513 + j 0,517 |
| 17,5 | 1,855 + j 0,285 | -0,96 + j 0,025 | -0,522 + j 0,550 |
| 24,7 | 0,253 + j 1,377 | -2,76 + j 1,82 | -0,522 + j 2,556 |
| 25,7 | 0,359 + j 1,483 | 2,74 + j 0,64 | 1,172 + j 1,888 |
| 26,7 | 0,465 + j 1,589 | 2,29 - j 0,12 | 1,347 + j 1,213 |
| 27,7 | 0,571 + j 1,695 | 1,87 - j 0,335 | 1,232 + j 0,858 |
| 28,7 | 0,677 + j 1,801 | 1,545 - j 0,38 | 1,076 + j 0,652 |
| 29,6 | 0,7724 + j 1,8964 | 1,355 - j 0,37 | 0,964 + j 0,55 |

Stabes bezogen und dem Diagramm der Hyperbelfunktionen *th* wird der Wert *g*, der diesem Wert *Z/Z₀* beigeordnet ist, entnommen. Addiert man noch das Übertragungsmaß des oberen Stabes hinzu, so erhält man den resultierenden Wert *g* der ganzen Anordnung. Liest man aus dem Diagramm den zugeordneten Wert *Z/Z₀* ab, so läßt sich *Z* berechnen.

Beispiel 5. Die Berechnung wurde mit den Angaben des vorstehenden Beispiels durchgeführt. Ihr Verlauf ist in Tab. V, die Änderung der Impedanz über der Höhe in Abb. 13 gezeigt.

Bei der Berechnung ist die Reaktanz des Steges :

$$X_h = 377 \text{ s}^{-1} 1,256 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ s m}^{-1} \frac{0,1 \text{ m } 7,2 \text{ mm}}{1,7 \text{ mm}} = 2,006 \cdot 10^{-4} \Omega .$$

Der gemeinsame Querschnitt der beiden Stäbe beträgt :

$$A = 19,6 \text{ mm}^2 + 70 \text{ mm}^2 = 89,6 \text{ mm}^2 ,$$

und somit beläuft sich der Gleichstromwiderstand auf :

$$R_g = 0,0211 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1} \frac{0,1 \text{ m}}{89,6 \text{ mm}^2} = 0,2355 \cdot 10^{-4} \Omega .$$

Werden die Abmessungen des gleichwertigen Ersatzsteges — dessen magnetische Leitfähigkeit der des ursprünglichen Steges und dessen Breite der des unteren und oberen Stabes gleich ist — mit h'_2 bzw. c'_2 bezeichnet, so beträgt die Reaktanz bei gleichmäßiger Stromverteilung :

$$X_g = \omega \mu_0 \left[\frac{h_1^2 h'_2}{(h_1 + h_3)^2 c'_2} + \frac{h_1 + h_3}{3 c_2} \right] l = 2,11 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Die Widerstandszunahme bzw. Reaktanzabnahme ist also bei dem Wert von $Z = (0,964 + j 0,55) 10^{-4} \Omega$:

$$k_r = \frac{0,964}{0,2355} = 4,09, \quad k_x = \frac{0,55}{2,11} = 0,261.$$

Wie vorher bereits angegeben, gelten für diese die von SCHUISKY berechneten Werte (36) bzw. die Werte mit den genauen Formeln (39) :

$$k_r = 4,03 \quad k_x = 0,264.$$

Die Ergebnisse sind also innerhalb der Berechnungsungenauigkeit identisch.

Nach der in der Praxis üblichen Weise unter Zugrundelegung der Ersatzschaltung ergab sich $Z = (0,853 + j 0,495) \cdot 10^{-4} \Omega$; es gilt also :

$$k_r = \frac{0,853}{0,2355} = 3,62 \quad k_x = \frac{0,495}{2,11} = 0,234$$

E) Der trapezförmige Stab

Dem trapezförmigen Stab entspricht eine Leitung, deren Parameter sich kontinuierlich und gleichmäßig ändern. Derartige Leitungen werden z. B. in der Mikrowellentechnik zur Anpassung von zwei homogenen Leitungen angewendet. Ist das Ausmaß der Änderung im Vergleich zur Wellenlänge gering, so kann die charakteristische Impedanz der Leitung unter entsprechenden Vernachlässigungen sowie unter Annahme der exponentialen Änderung von Z und Y an einem beliebigen Ort näherungsweise [24, 76] mit Hilfe des Zusammenhanges

$$Z'_0 = \frac{\gamma}{\gamma + \delta/2} Z_0$$

bestimmt werden, wobei der Wert δ durch die Beziehung

$$\frac{Z_{x_2}}{Z_{x_1}} = e^{-\delta (x_2 - x_1)}$$

definiert wird und $Z_0 = \sqrt{z_{x_2}/y_{x_2}}$ gilt.

Mittels dieser Formel läßt sich die Impedanz des trapezförmigen Stabes (Abb. 16) unter Anwendung der bisherigen Methode berechnen. Mit der Nuthöhe ändert sich nur die Breite c . z ist zu dieser umgekehrt proportional, y verhältnismäßig. Ersetzt man die lineare Änderung von c näherungsweise exponential, so gilt: $c_h/c_o = e^{\delta h}$. Durch die Näherungsformel wird auch diesmal nur dann ein annehmbares Ergebnis geliefert, wenn δ im Vergleich zu γ — bzw. zu β — klein ist, also wenn die Änderung der Nutbreite im Vergleich zur Wellenlänge klein ist, nämlich bei hohen Stäben oder großer Frequenz, oder genauer ausgedrückt, wenn ihre Seitenwände kleine Neigungen aufweisen.



Abb. 16

Die Impedanz des trapezförmigen Stabes kann in einer beliebigen Höhe, z. B. in der Höhe h , bei einer verhältnismäßig kleinen Neigung ($\coth w = th w \pm \pm j 90^\circ$) unter Anwendung der Beziehung

$$\left. \begin{aligned} Z_h &\approx Z_{0h} \frac{\gamma}{\gamma + \delta/2} \coth(\gamma h) \approx Z_{0h} \coth \gamma h - \\ &- \frac{\delta/2}{\gamma} Z_{0h} \coth \gamma h \approx Z_{0h} \coth(\gamma h) - Z_{0h} \frac{\delta/2}{\gamma} \end{aligned} \right\}$$

berechnet werden. Bei den obigen Bedingungen ist nämlich $\coth(\gamma h) \approx 1$. Die außerordentlich einfache Beschaffenheit dieser Formel kommt besonders dann zum Ausdruck, wenn sie mit der genauen Lösung von LAIBLE, in der auch zylindrische Funktionen enthalten sind [10], verglichen wird.

In dem Ausdruck bedeutet Z_{0h} die charakteristische Impedanz am oberen Ende des Stabes. Die Formel hat den Vorteil, daß ihr erstes Glied die Impedanz eines Rechteckstabes, dessen Breite gleich der oberen Breite des trapezförmigen Stabes ist, das zweite Glied aber die Differenz zwischen den beiden Stäben bedeutet. Dies ist auch vom Gesichtspunkt der Durchführung der Berechnungen günstig. Die Abnahme der Wechselstromimpedanz bedeutet aber natürlich nicht, daß die Stromverdrängung des trapezförmigen Stabes etwa kleiner wäre als die beim Rechteckstab. Mit dem unteren Breiterwerden

des oben gleich breiten Stabes nimmt nämlich auch der Gleichstromwiderstand ab. Der Vergleich der beiden Stäbe ist nur dann richtig, wenn man dazu eine entsprechende Grundlage findet, z. B. (vgl. mit [21,226]), daß die beiden Stäbe bei gleichmäßiger Stromverteilung gleiche Widerstände und gleiche Reaktanzen besitzen. Im nachfolgenden Zahlenbeispiel wurde der Querschnitt des Stabes dementsprechend gewählt.

Beispiel 6. Die Abmessungen jenes Stabes, der bei gleichförmiger Stromverteilung den gleichen Widerstand und dieselbe Reaktanz besitzt wie der Stab im Beispiel 1, (verhält sich also in der Nähe der synchronen Drehzahl identisch zu jenem) sind: $c_0 = 4,76$ mm, $c_h = 2,38$ mm, $h = 25,2$ mm.

Der Querschnitt des Stabes ist $A = 90$ mm² und somit beträgt sein Widerstand:

$$R_g = 0,222 \cdot 10^{-4} \Omega,$$

Seine Reaktanz beläuft sich mit dem Wert $y(\beta) = 0,947$, der dem Diagramm von NÜRNBERG zu $\beta = 0,5$ entnommen wurde, auf:

$$X_g = 2\pi f \mu_0 \frac{h l}{3 c_h} y(\beta) = 1,318 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Die Fortpflanzungskonstante des Stabes beträgt

$$\gamma = 0,0993 + j 0,0993 \text{ mm}^{-1},$$

und somit wird sein Übertragungsmaß

$$\gamma h = 2,5 + j 2,5.$$

sein. Für den Wert

$$\gamma h + j \pi/2 = 2,5 + j 0,93$$

gilt:

$$\frac{Z_h}{Z_{0h}} = 1,007 + j 0,02.$$

Die charakteristische Impedanz beträgt am oberen Ende des Stabes:

$$Z_{0h} = (0,835 + j 0,835) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Somit läßt sich das erste Glied unserer Formel wie folgt anschreiben:

$$Z_{0h} \tanh(\gamma h + j \pi/2) = (0,825 + j 0,8584) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Aus dem Verhältnis der unteren Stabbreite zur oberen ergibt sich :

$$e^{-\delta h} = 0,5,$$

und damit gilt :

$$\left. \begin{aligned} \delta h = 0,69 \quad \delta &= \frac{0,69}{25,2 \text{ mm}} = 0,02738 \text{ mm}^{-1} \\ Z_{0h} \frac{\delta/2}{\gamma} &= 0,115 \cdot 10^{-4} \Omega. \end{aligned} \right\}$$

Die Gesamtimpedanz des Stabes ist also :

$$Z_h = (0,710 + j 0,8584) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Die Widerstandzunahme und die Abnahme des Streublindwiderstandes sind :

$$k_r = 3,2, \quad k_x = 0,6525.$$

Dieselben Werte betragen nach den Diagrammen von NÜRNBERG :

$$k_r = 3,1 \quad k_x = 0,67.$$

Die Berechnung der Impedanzänderung ist Tab. VI bzw. Abb. 8 ersichtlich.

In Abb. 8 wurde gestrichelt eingetragen, wie sich die Impedanz ändern würde, wenn die Stabhöhe noch weiter zunehmen sollte. Daraus geht klar hervor, daß das Impedanzdiagramm in eine Gerade mit einer Neigung von 45° übergeht und die charakteristische Impedanz des trapezförmigen Stabes im Unendlichen liegt, weil mit der Verjüngung der Nut der Streufluß und damit die Reaktanz, aber gleichzeitig mit der Stromverdrängung auch der Widerstand unendliche große Werte annehmen würden.

Tabelle VI

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | γx | $\coth \gamma x$ | $\coth \gamma x - \frac{\delta/2}{\gamma}$ | $\frac{c_x}{\text{mm}}$ | Z_{0x} | $Z_t/10^{-4} \Omega$ |
|-----------------------|-------------------|-------------------|--|-------------------------|---------------------|----------------------|
| 3 | $0,296 + j 0,296$ | $1,8 - j 1,58$ | $1,731 - j 1,511$ | $4,477$ | $0,437 + j 0,437$ | $1,417 + j 0,097$ |
| 6 | $0,596 + j 0,596$ | $1,1 - j 0,67$ | $1,031 - j 0,601$ | $4,194$ | $0,4665 + j 0,4665$ | $0,761 + j 0,201$ |
| 9 | $0,894 + j 0,894$ | $0,885 - j 0,297$ | $0,816 - j 0,228$ | $3,91$ | $0,5 + j 0,5$ | $0,522 + j 0,294$ |
| 12 | $1,191 + j 1,191$ | $0,87 - j 0,11$ | $0,801 - j 0,041$ | $3,63$ | $0,539 + j 0,539$ | $0,454 + j 0,41$ |
| 15 | $1,49 + j 1,49$ | $0,905 - j 0,012$ | $0,836 + j 0,057$ | $3,34$ | $0,586 + j 0,586$ | $0,457 + j 0,523$ |
| 18 | $1,787 + j 1,787$ | $0,95 + j 0,025$ | $0,881 + j 0,094$ | $3,06$ | $0,64 + j 0,64$ | $0,504 + j 0,624$ |
| 21 | $2,084 + j 2,084$ | $0,988 + j 0,025$ | $0,919 + j 0,094$ | $2,778$ | $0,704 + j 0,704$ | $0,581 + j 0,713$ |
| 24 | $2,382 + j 2,382$ | $1 + j 0,017$ | $0,931 + j 0,086$ | $2,494$ | $0,784 + j 0,784$ | $0,671 + j 0,807$ |
| 25,2 | $2,5 + j 2,5$ | $1,007 + j 0,02$ | | $2,38$ | $0,835 + j 0,835$ | $0,710 + j 0,8584$ |

Beim gewöhnlichen trapezförmigen Stab bietet die Berechnung keine besonderen Vorteile, weil k_r und k_x , Diagramme entnommen werden können, die genaue Werte liefern. Sie ist höchstens insofern lohnend, weil bei bekannter Impedanz des Rechteckstabes, dessen obere Breite konstant ist, sich die Abweichung schnell berechnen läßt. Abgesehen von einigen Varianten [14, 67] kann man in den zugänglichen Kurven keine Werte des sich nach unten zu verjüngenden trapezförmigen Stabes finden. Dabei kommen solche Abschnitte oft vor. So z. B. muß man den trapezförmigen Stab manchmal unten verjüngen (Abb. 17), um die Zahnsättigung zu vermeiden. Genau solchen Abschnitten begegnet man auch bei den Doppelkäfigstäben (Abb. 17). Die Berechnung erweist sich auch bei den unten erweiterten Stäben als vorteilhaft, wenn es

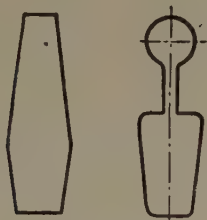


Abb. 17

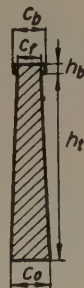


Abb. 18

sich um den Abschnitt eines zusammengesetzten Stabes handelt. Hierbei wird nämlich die bei der Doppelkäfiganordnung besprochene Berechnung angewendet und man benötigt nicht die Widerstand- bzw. Reaktanzfaktoren, sondern nur die Impedanz, weil die obige Berechnung mit ihrem Wert in die Wege geleitet wird. So z. B. kommt auch vor, daß der trapezförmige Stab oben breiter gestaltet wird (Abb. 18), um damit die Reaktanz herabsetzen zu können. Dadurch verringert sich die Widerstandzunahme nur wenig, wie dies auch im nachfolgenden Beispiel zu sehen ist.

Das sich nach unten zu verjüngende Trapez ist auch bei den Anlaßkäfigen der Synchronmaschinen von Bedeutung, weil die Nuten der Anlaßkäfige bei größeren Maschinen allgemein diese Form besitzen.

Beispiel 7. In Abb. 18 erweitert sich der trapezförmige Stab aus dem Beispiel 6 oben in einer Höhe von 1,2 mm.

Die Impedanz des trapezförmigen Teiles beträgt laut Tabelle VI in der Höhe 24 mm :

$$Z_{24} = (0,671 + j 0,807) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Der auf die charakteristische Impedanz des breiter gewordenen Teiles $Z_{ob} = (0,489 + j 0,489) \cdot 10^{-4} \Omega$ bezogene Wert beträgt :

$$\frac{Z_{24}}{Z_{ob}} = (1,513 + j 0,1393) \cdot 10^{-4} \Omega$$

Hierzu gehört nach dem Diagramm :

$$h_t + j\pi/2 = 0,7775 + j1,467 \text{ mm}^{-1}.$$

Addiert man die Übertragungsmaß des breiten Teiles hinzu :

$$\gamma h_b = 0,1191 + j0,1191 \text{ mm}^{-1}.$$

so folgt unter Berücksichtigung des Wertes $0,8946 + j1,584$:

$$\frac{Z}{Z_{0h}} = 1,4 - j0,01.$$

Die Impedanz des Stabes ist also :

$$Z = (0,689 + j0,678) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Der Widerstand des Stabes beläuft sich auf :

$$R_g = 0,02 \frac{0,1}{91,8} \Omega = 0,218 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Die Reaktanz des unteren trapezförmigen Teiles ergibt sich mit dem Wert $\gamma(\beta) = 0,957$, der dem Diagramm von NÜRNBERG im Verhältnis $\beta = c_j/c_0 = 0,524$ entnommen wurde, zu :

$$X_l = 314 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{24 \cdot 0,1}{3 \cdot 2,494} 0,957 \Omega = 1,211 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Die magnetische Leitfähigkeit des oberen Teiles beträgt :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{Nb} &= \mu_0 c_b \int_0^{hb} \frac{(A_l + c_b x)^2}{A^2} dx = \\ &= \mu_0 \frac{h_b}{A^2 c_b} \left(\frac{c_b^2 h_b^2}{3} + A_l c_b h_b + A_l^2 \right) = 0,345 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}^{-1} \end{aligned} \right\}$$

die Reaktanz beläuft sich auf :

$$X_b = 2\pi f l \lambda_{Nb} = 0,108 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Somit kann die Gesamtreaktanz mit

$$X_g = X_l + X_b = 1,319 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

angeschrieben werden.

Unter Berücksichtigung der gewonnenen Werte sind Widerstandzunahme und Reaktanzabnahme :

$$k_r = \frac{0,689}{0,218} = 3,16, \quad k_x = \frac{0,679}{1,319} = 0,515.$$

Die Erweiterung ist also bei geringer Änderung der Widerstandzunahme geeignet, die Reaktanz erheblich herabzusetzen. Die Wirkung der Erweiterung ist aus Abb. 8, wo die Impedanzänderung eingetragen wurde, gut erkennbar. Die Impedanzkurve wendet sich beinahe waagrecht und die Reaktanz nimmt bei einem etwa stetigen Wechselstromwiderstand wesentlich ab.

Beispiel 8. Man berechne die Impedanz des unteren Stabes gemäß Beispiel 4, wenn der Stab infolge der Zahnsättigung um das Verhältnis von $c_{01}/c_{h_1} = 0,8$ nach unten zu verjüngt werden muß und man beabsichtigt, den Gleichstromwiderstand des Stabes mit unverändertem Wert beizubehalten.

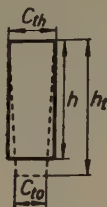


Abb. 19

Mit der gewählten Verjüngung gilt: $c_{to} = c_{th} 0,8 = 3,2$ mm. Damit kann man anschreiben Abb. 19:

$$h_t = \frac{A_1}{\frac{c_{to} + c_{th}}{2}} = 19,45 \text{ mm}.$$

Die Berechnung der Impedanz gestaltet sich wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma h_t + j\pi/2 &= 2,062 + j0,493 \text{ mm}^{-1} \\ \coth(\gamma h_t) &= 0,984 + j0,028 \\ Z_{0ht} \coth(\gamma h_t) &= (0,5144 + j0,5446) \cdot 10^{-4} \Omega \\ e^{\delta h_t} = 1,25 \quad \delta h_t &= 0,22 \quad \delta = 0,0113 \text{ mm}^{-1} \\ Z_{0ht} \frac{\delta/2}{\gamma} &= 0,0287 \\ Z &= (0,543 + j0,5446) \cdot 10^{-4} \Omega. \end{aligned} \right\}$$

Die zur gleichmäßigen Stromverteilung beigeordnete Reaktanz ist nach dem Diagramm von LENGYEL [14, 65] mit Berücksichtigung der für $\beta = 1,25$ entnommenen Werte $p(1,25) = 0,995$:

$$X_g = 2\pi f \mu_0 \frac{h}{3c_h} p(\beta) = 0,764 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Somit ergeben sich bei $R_g = 0,279 \cdot 10^{-4} \Omega$:

$$k_r = \frac{0,543}{0,279} = 1,946, \quad k_x = \frac{0,5446}{0,764} = 0,713.$$

Die Widerstandszunahme ist deshalb größer, weil die Wirkung der Höhensteigerung größer ist als der Einfluß der Abnahme der Stromverdrängung.

Den Kurven von LENGYEL kann man für die Werte $\xi = 2,06$ und $\beta = 1,25$ nachstehende Größen entnehmen :

$$k_r = 1,9 \quad k_x = 0,72$$

Der Wert von k_x wurde an der Kurve $\beta = 1$ abgelesen. Die Reaktanzabnahme stimmt bei der sich nach unten zu verjüngenden Nut mit jener der parallelen Nut praktisch überein.

Der weitere Verlauf der Berechnung des Doppelkäftigstabes ist mit der vorausgehenden identisch.

In der Mikrowellentechnik wird die Herabsetzung der Reflexionen beim Zusammentreffen von zwei verschiedenen Leitungen erstrebt. Bei den Stäben mit Stromverdrängung muß man dagegen die Reflexionen steigern, weil dann das Eindringen der Wellen in den unteren Nutteil abnimmt, d. h. die Stromverdrängung zunimmt. Vom Gesichtspunkt der Steigerung der Stromverdrängung sind also die kontinuierlichen Übergänge zu vermeiden und es ist zweckmäßig, wenn man plötzliche Querschnittsänderungen vorsieht.

F) Leiter von beliebiger Form

Mit unserem Verfahren kann man auch die Impedanz einer Nut von beliebiger Form unter Zugrundelegung des Kraftlinienbildes annähernd bestimmen. Man unterteilt den Leiter in Abschnitte, die zwischen je zwei Kraftlinien, oder richtiger gesagt : zwischen je zwei Kraftlinienflächen fallen. Die Berechnung wird mit ihren mittleren Breiten und Höhen in der Weise vorgenommen, als ob es sich um einen Rechteckleiter handeln würde. Ansonsten stimmt das Verfahren mit den obigen völlig überein. Die Bedingung der parallelen Wände wird durch die einzelnen Abschnitte um so mehr angenähert, je feiner die Unterteilung ist. Die zur Berechnung erforderliche Arbeit erfährt aber eine verhältnismäßige Steigerung und somit nimmt auch die Zahl der Fehler zu, die man bei der Ablesung des Diagramms und bei der Durchführung der Berechnungsoperationen begehen kann. Bei dem Verfahren erweist sich der Umstand als vorteilhaft, daß es genügt, wenn man nur die Form

der Kraftlinien kennt. Ihre Dichte ist nebensächlich, weil man sich immer beliebige — einander genügend naheliegende — zwei Kraftlinien wählen kann.

Beispiel 9. Es soll die Impedanz der kreisförmigen Nut laut Abb. 20 bestimmt werden, wobei der Durchmesser $d = 23,4$ mm, Nutöffnung $s = 5,9$ mm ist, wenn $\varrho = 0,0211 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$, $l = 0,1$ m und $f = 50 \text{ s}^{-1}$ gilt.

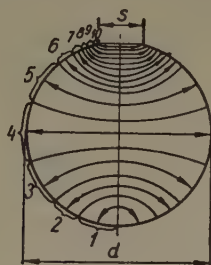


Abb. 20

In Abb. 20 wurde die Nut lediglich in 10 Abschnitte unterteilt. Die mittleren Längen und Höhen der einzelnen Abschnitte sind in Tab. VII enthalten. Es ergeben sich mit den gewählten Angaben :

$$\gamma = 0,0967 + j 0,0967 \text{ mm}^{-1}$$

und

$$Z_{0k} = \frac{(2,042 + j 2,042) \cdot 10^{-4} \Omega \text{ mm}}{c_k}.$$

Die charakteristischen Impedanzen der einzelnen Abschnitte werden nicht benötigt, die Werte Z_k/Z_{0k} rechnet man an den Grenzen der Abschnitte einfach im Verhältnis ihrer mittleren Breiten um. Der Verlauf der Berechnung geht aus Tab. VII hervor und ist mit der Berechnung der L-förmigen Nut vollkommen identisch, nur die Zahl der Schritte ist größer.

Die Impedanz der gesamten Nut beträgt :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Z_{10}}{Z_{010}} Z_{010} = (0,515 + j 0,165) (0,335 + j 0,335) \cdot 10^{-4} \Omega. \\ &= (0,1155 + j 0,2295) \cdot 10^{-4} \Omega. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Z &= \frac{Z_{10}}{Z_{010}} Z_{010} = (0,515 + j 0,165) (0,335 + j 0,335) \cdot 10^{-4} \Omega. \\ &= (0,1155 + j 0,2295) \cdot 10^{-4} \Omega. \end{aligned}} \right\}$$

Bei gleichmäßiger Stromverteilung ist der Widerstand des Stabes :

$$R_g = \varrho \frac{l}{A} = 0,0211 \cdot \frac{0,1}{429} \Omega = 0,0492 \cdot 10^{-4} \Omega,$$

Tabelle VII

| k | c_k | h_k | g_k | Z_k/Z_{0k} | $Z_{0k}/10^{-4} \Omega$ | $Z_k/10^{-4} \Omega$ |
|-----|-------|-------|---|---|-------------------------|----------------------|
| 1 | 7 | 4,3 | $0,416 + j 1,986$ $0,238 + j 1,765$ $0,3 + j 0,3$ | $1,245 - j 0,935$ $2,67 - j 0,2$ | $-0,292 + j 0,292$ | $0,637 + j 0,091$ |
| 2 | 15 | 3,1 | $0,538 + j 2,065$ $0,3 + j 1,886$ $0,45 + j 0,45$ | $1,2 - j 0,79$ $1,665 - j 1,095$ | $0,1361 + j 0,1361$ | $0,271 + j 0,055$ |
| 3 | 20,8 | 4,65 | $0,75 + j 2,336$ $0,725 + j 2,2$ $0,556 + j 0,556$ | $0,925 - j 0,435$ $1,04 - j 0,49$ | $0,0982 + j 0,0982$ | $0,1335 + j 0,0481$ |
| 4 | 23,4 | 5,75 | $1,281 + j 2,756$ $1,035 + j 2,925$ $0,469 + j 0,469$ | $0,89 - j 0,095$ $0,79 - j 0,0844$ | $0,0873 + j 0,0873$ | $0,086 + j 0,0694$ |
| 5 | 20,8 | 4,85 | $1,524 + j 0,253$ $0,88 + j 0,07$ $0,15 + j 0,15$ | $0,924 + j 0,041$ $0,711 + j 0,0315$ | $0,0982 + j 0,0982$ | $0,0867 + j 0,0947$ |
| 6 | 16 | 1,55 | $1,03 + j 0,22$ $0,75 + j 0,125$ $0,126 + j 0,126$ | $0,792 + j 0,093$ $0,644 + j 0,0756$ | $0,1276 + j 0,1276$ | $0,089 + j 0,113$ |
| 7 | 13 | 1,3 | $0,876 + j 0,241$ $0,63 + j 0,135$ $0,108 + j 0,108$ | $0,726 + j 0,12$ $0,57 + j 0,094$ | $0,157 + j 0,157$ | $0,97 + j 0,131$ |
| 8 | 10,2 | 1,12 | $0,738 + j 0,243$ $0,57 + j 0,16$ $0,092 + j 0,092$ | $0,65 + j 0,145$ $0,53 + j 0,118$ | $0,2 + j 0,2$ | $0,101 + j 0,159$ |
| 9 | 8,3 | 0,95 | $0,662 + j 0,252$ $0,475 + j 0,155$ $0,065 + j 0,065$ | $0,62 + j 0,169$ $0,456 + j 0,124$ | $0,246 + j 0,246$ | $0,1109 + j 0,1941$ |
| 10 | 6,1 | 0,675 | $0,54 + j 0,22$ | $0,515 + j 0,165$ | $0,335 + j 0,335$ | $0,1155 + j 0,2295$ |

die Reaktanz der Nut ist dagegen mit dem auf Grund der Berechnungen von R. TUSCHÁK [25] oder des Aufsatzes von ROTHERT [23] gewonnene Wert

$$\lambda_g = 0,72 \text{ mm}^{-1}$$

gleich

$$X_g = \omega \mu_0 \lambda_g l = 0,282 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Daraus folgt :

$$k_r = \frac{0,1155}{0,0492} = 2,35, \quad k_x = \frac{0,2295}{0,282} = 0,814.$$

Auf der Grundlage der genauen Berechnungen von TUSCHÁK gilt :

$$k_r = 2,41, \quad k_x = 0,85.$$

Das Ergebnis der Berechnung kann trotz der ziemlich groben Abschnitteinteilung als völlig befriedigend angesprochen werden. Die Impedanzänderung über der Stabhöhe ist Abb. 21 gezeigt.

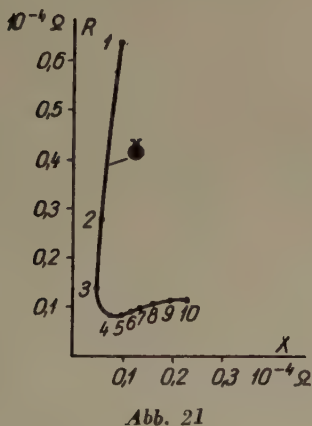


Abb. 21

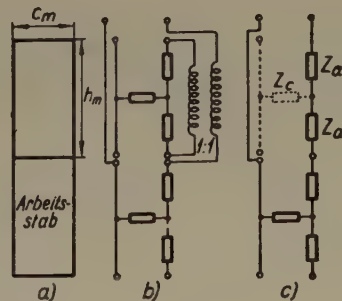


Abb. 22

G) Stromverdrängungsloser Arbeitsstab mit darüberliegendem Stromverdrängungsstab

Die Enden des Stromverdrängungsstabes sind offen (Abb. 22) und somit beträgt sein resultierender Strom Null. Die Impedanz des unteren Arbeitsstabes wird durch die im Stromverdrängungsstab induzierten Wirbelströme geändert. Diese Impedanzänderung des Arbeitsstabes auf Einfluß des Stromverdrängungsstabes kann man unter Zugrundelegung der Ersatzschaltung 22b berechnen. Die den einzelnen Stäben entsprechenden Leitungen wurden durch ihre äquivalenten T-Schaltungen ersetzt. Zwischen den beiden Stäben

besteht nur eine induktive Verbindung, die mit dem idealen Transformator von der Übersetzung 1 : 1 dargestellt wurde. Die in Abb. 22c enthaltene Ersatzschaltung ist der so gewonnenen Ersatzschaltung offensichtlich völlig gleichwertig. Demnach ist aber die durch den Stromverdrängungsstab erzeugte zusätzliche Impedanz eben

$$Z_z = 2 Z_a$$

Drückt man die Längsimpedanz des symmetrischen Vierpols in T-Schaltung mit Hilfe der Querimpedanz und der Konstante des Übertragungsmaße aus, so gilt :

$$Z_a = Z_c \operatorname{ch} g - Z_c$$

Die Querimpedanz läßt sich mit Hilfe des Übertragungsmaßes und der charakteristischen Impedanz des Vierpols wie folgt ausdrücken :

$$Z_c = \frac{U_{20}}{I_{10}} = Z_{120} = \frac{1}{C} \quad \text{und} \quad \frac{1}{C} = \frac{Z_0}{\operatorname{sh} g}.$$

Mit diesen Werten kann die zusätzliche Impedanz, die durch den Stromverdrängungsstab (m) verursacht wird, wie nachstehend angeschrieben werden :

$$Z_z = 2 \left[Z_0 \coth g_m - Z_0 \frac{1}{\operatorname{sh} g_m} \right].$$

Das in Klammer stehende erste Glied wird in der üblichen Weise berechnet. Der Wert von $\operatorname{sh} g_m$ wird mit Hilfe des Diagramms der komplexen Hyperbelfunktionen oder einer Tabelle (wie später bei der Berechnung der Stromverteilung) bestimmt.

Die Gesamtimpedanz des Arbeitsstabes ist die Summe seiner bereits früher berechneten und der durch den Stromverdrängungsstab erzeugten zusätzlichen Impedanz. Liegen die beiden Stäbe nicht unmittelbar übereinander, so muß man die Reaktanz, die der Streuung des zwischen ihnen befindlichen, mit keinem Leiter ausgefüllten Abschnitts entspricht, zur derart berechneten Impedanz addieren.

Beispiel 10. Es soll die zusätzliche Impedanz berechnet werden, die von einem Stromverdrängungsstab von den Abmessungen $15 \times 15,1$ mm verursacht wird, wenn sein spezifischer Widerstand $\varrho = 0,02 \, \Omega \, \text{mm}^2 \, \text{m}^{-1}$, die Länge der Nut $l = 0,1$ m und die Frequenz $f = 50 \, \text{s}^{-1}$ ist.

Mit den gegebenen Werten gilt :

$$\begin{aligned}
 \gamma_m h_m &= 1,5 + j 1,5 \\
 \coth \gamma_m h_m &= 0,905 - j 0,014 \\
 \operatorname{sh} (\gamma_m h_m) &= 0,151 + j 2,34 \\
 1/\operatorname{sh} (\gamma_m h_m) &= 0,0274 - j 0,424 \\
 \coth (\gamma_m h_m) - [1/\operatorname{sh} (\gamma_m h_m)] &= 0,8776 + j 0,41 \\
 \mathbf{Z}_{0m} &= (0,1987 + j 0,1987) 10^{-4} \Omega \\
 \mathbf{Z} &= (0,1857 + j 0,5117) \cdot 10^{-4} \Omega \\
 R_g &= 0,132 \cdot 10^{-4} \Omega \\
 X_g &= 0,592 \cdot 10^{-4} \Omega \\
 k_{rm} &= 1,4 \quad k_{xm} = 0,864
 \end{aligned}$$

Nach den Diagrammen von LENGYEL [14, 78] oder RICHTER [7] gehören zum Wert $\xi = 1,5$:

$$k_{rm} = 1,4 \quad k_{xm} = 0,87.$$

II. Die Berechnung der Stromverteilung

Prinzipiell wird die Stromverteilung analog zur Konstruktion des Vektordiagramms der Impedanz gewonnen.

Das Spiralendiagramm (Ortskurve) von Strom und Spannung einer leerlaufenden Leitung ist aus Abb. 23 ersichtlich. Da die Nut einer Leitung im

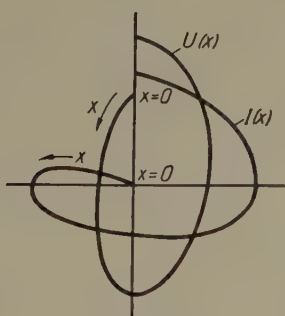


Abb. 23

Leerlauf entspricht, hat deren Strom- (und Spannungsänderung-) Diagramm in Abhängigkeit der Höhe einen ähnlichen Charakter. Die Nutimpedanz weist gegenüber der Leitung überall einen induktiven Charakter auf. Somit eilt ihr Stromvektor im Vergleich zur Spannung stets nach.

Die als Grundlage der Berechnungen dienende Stromgleichung kann man analog zur Ableitung des vorstehenden Ausdrucks der Impedanz gewinnen. Unter Anwendung der dort benutzten Bezeichnungen ist der Stromwert an einer beliebigen Stelle der Leitung auf den Strom des Leitungsendes bezogen :

$$\frac{I}{I_e} = \frac{I^+ + I^-}{I_e^+ + I_e^-} = \frac{I_e^+ e^{\gamma x} + I_e^- e^{-\gamma x}}{I_e^+ + I_e^-} = \frac{I_e^+ (e^{\gamma x} - r_e e^{-\gamma x})}{I_e^+ (1 - r_e)} = \frac{e^{\gamma x} + e^{-2g_e} e^{-\gamma x}}{1 + e^{-2g_e}} = \left. \begin{aligned} &= \frac{e^{g_e + \gamma x} + e^{-(g_e + \gamma x)}}{e^{g_e} + e^{-g_e}} = \frac{\operatorname{ch}(g_e + \gamma x)}{\operatorname{ch}(g_e)} = \frac{\operatorname{ch} g_b}{\operatorname{ch} g_e} \end{aligned} \right\}$$

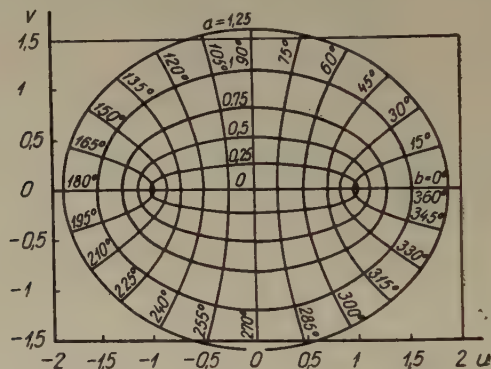


Abb. 24

Der veränderliche Strom I kann statt des Stromes am Leitungsende auch auf einen beliebigen anderen Strom bezogen werden :

$$\frac{I}{\operatorname{ch} g_b} = \frac{I_e}{\operatorname{ch} g_e} = \frac{I_l}{\operatorname{ch} g_l}$$

Der Ausdruck läßt sich sinngemäß auch für den in eine Nut gebetteten Leiter anwenden. Die relativen Werte des Stromes :

$$\frac{I}{(I_e / \operatorname{ch} g_e)} = \operatorname{ch} g$$

als Funktionen von g kann man dem Diagramm der Hyperbelfunktionen ch entnehmen. Dies wird in Abb. 24 gezeigt [$u + jv = \operatorname{ch}(a + jb)$].

Zur Bestimmung der absoluten Stromwerte muß der Strom irgendwo bekannt sein. In der Regel kennt man den Gesamtstrom, also den Strom in der Höhe h . Zeichnet man also die relativen Stromwerte, so ist der letzte Stromvektor mit dem Gesamtstrom der Nut identisch. Damit ist auch der Maßstab des Diagramms bestimmt. Am Boden der Nut ist der Strom gleich Null.

Das Stromdiagramm der Nut mit parallelem Wänden geht aus Abb. 25 hervor.

Zur Berechnung der Stromverteilung einer zusammengesetzten Nutform soll als Beispiel der gegossene Doppelkäftigstab des Beispiels 4 gewählt werden.

Längs der Höhe des unteren Stabes trägt man zu den Werten $\gamma x + j\pi/2$ die Vektoren $ch(\gamma x + j\pi/2)$ auf. Beim oberen Ende des unteren Stabes liegt an der Querschnittsänderung ein Sprung vor. Das Maß der Stromzunahme ändert sich an dieser Stelle. Um sich weiter fortbewegen zu können, muß γ_e ,

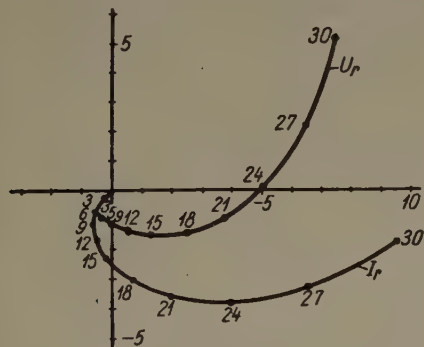


Abb. 25

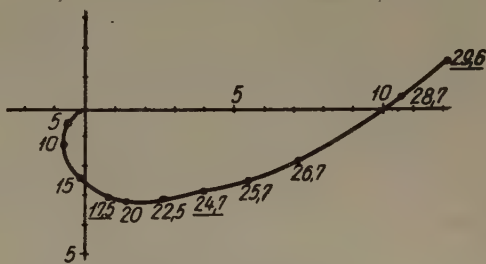


Abb. 25

»das Übertragungsmaß der Last« bekannt sein, die am Beginn des ersten Abschnittes vom Leerlaufzustand her bekannt war. Diesmal kann g_s aus der Lastimpedanz bestimmt werden. Zum Wert Z_{h1}/Z_{02} des unteren Stabes, der auf die charakteristische Impedanz des Steges bezogen ist, wird dem Diagramm th der Wert $g_s = a_s + jb_s$ entnommen und man setzt die Berechnung mit diesem Wert fort. Infolge des Sprunges besitzt hier auch der relative Strom einen Sprung. Nachdem aber der Strom nur stetig zunehmen kann, sind die danach gewonnenen Stromwerte durchwegs mit dem Verhältnis der an der Grenze der beiden Abschnitte erhaltenen Stromvektoren zu multiplizieren. Auf diese Weise gewinnt man ein kontinuierliches Stromdiagramm. Ist der gesamte Stabstrom bekannt, so kann auch die Absolutgröße der einzelnen Stromvektoren bestimmt werden.

Die den Leitern von verschiedenen Höhen zugeordneten Spannungsvektoren kann man entweder mit der Multiplikation von Strömen und Impedanzen oder aber mit Hilfe des Diagramms der Hyperbelfunktionen sh auf Grund der Beziehung

$$\frac{U}{sh g} = \frac{U_v}{sh g_v} = \frac{U_h}{sh g_h}$$

konstruieren, die ähnlich zur Ableitung des Ausdruckes für den Strom gewonnen werden kann. Das Diagramm für Hyperbelfunktionen sh ist unter Zugrundelegung der Beziehung

$$sh\,g = j\,ch\,(g - j\,90^\circ)$$

mit dem Diagramm für Hyperbelfunktionen ch identisch. Es sind nur die Achsen vertauscht. Die Kurve der Spannungsverteilung ist auch in Abb. 25 dargestellt.

Beispiel 11. Auf Grund der obigen Ausführungen wurde die Berechnung der Stromverteilung des gegossenen Doppelkäftigstabes laut Beispiel 4 in der Tab. VIII vorgenommen und das Ergebnis in Abb. 26 gezeigt.

Tabelle VIII

| $\frac{x}{\text{mm}}$ | $\gamma x + j\pi/2$ | I_{rel} | I_{rel} |
|-----------------------|--------------------------|---------------------|--------------------|
| 5 | $0,53 + j\,120,3^\circ$ | $-0,58 + j\,0,5$ | $-0,58 + j\,0,5$ |
| 10 | $1,06 + j\,150,7^\circ$ | $-1,38 + j\,0,64$ | $-1,38 + j\,0,64$ |
| 15 | $1,59 + j\,175^\circ$ | $-2,4 + j\,0,07$ | $-2,4 + j\,0,07$ |
| 17,5 | $1,855 + j\,196,4^\circ$ | $-3,12 - j\,0,87$ | $-3,12 - j\,0,87$ |
| 17,5 | $0,43 + j\,180,9^\circ$ | $-1,12 - j\,0,02$ | $-3,12 - j\,0,87$ |
| 20 | $0,695 + j\,196^\circ$ | $-1,2 - j\,0,23$ | $-3,2 - j\,1,47$ |
| 22,5 | $0,96 + j\,211,1^\circ$ | $-1,26 - j\,0,6$ | $-3,1 - j\,2,7$ |
| 24,7 | $1,198 + j\,224,6^\circ$ | $-1,265 - j\,1,08$ | $-2,76 - j\,3,96$ |
| 24,7 | $0,445 + j\,265^\circ$ | $-0,093 - j\,0,458$ | $-2,76 - j\,3,96$ |
| 25,7 | $0,551 + j\,271^\circ$ | $-0,001 - j\,0,578$ | $-2,46 - j\,5,44$ |
| 26,7 | $0,657 + j\,277^\circ$ | $+0,157 - j\,0,793$ | $-1,7 - j\,8,16$ |
| 28,7 | $0,869 + j\,289^\circ$ | $+452 - j\,0,929$ | $+0,48 - j\,10,64$ |
| 29,6 | $0,964 + j\,295^\circ$ | $+0,62 - j\,1,017$ | $+1,7 - j\,12,16$ |

Auf Grund des vorangeführten Beispiels kann nach dem Muster der Berechnung der Impedanzen auch die Stromverteilung anderer Stabformen leicht bestimmt werden.

Zusammenfassung

Die Berechnung der Stromverdrängungsstäbe wird auf Grund der Analogie auf die Theorie der Leitungen zurückgeführt. Die dort gebräuchlichen Methoden werden angewendet, dadurch werden für einzelne Nutenformen auffallend einfache Ausdrücke erhalten. Willkürliche Nutenformen können durch eine einfache halbgraphische Methode berechnet werden. Der zweite Teil zeigt ein halbgraphisches Verfahren für die Bestimmung der Stromverteilung. Der Aufsatz zeigt die Berechnung sämtlicher in der Praxis vorkommenden Doppelnut, Stromverdrängungsnut und Blindstabläufer.

Schrifttum

1. FIELD, A. B.: Eddy Currents in Large Slot-Wound Conductors. Am. Inst. of El. Eng. **24**, 761—788 (1905).
FIELD, M. B., Idle Currents. Journal of the Inst. El. Eng. **37** (1906).
2. EMDE, F., Einseitige Stromverdrängung in Ankernuten. E. u. M. 703—707 und 726 (1908).
3. EMDE, F.: Die komplexe Rechnung bei Schwingungen. E. u. M. 78—83 und 111—113 (1909).
4. EMDE, F.: Über einseitige Stromverdrängung. E. u. M. 301 (1922).
5. ROGOWSKI, W.: Über zusätzliche Kupferverluste, über kritische Kupferhöhe einer Nut und über das kritische Widerstandsverhältnis einer Wechselstrommaschine. Archiv für El. **2**, 81 (1913).
6. RICHTER, R.: Über zusätzliche Kupferverluste. Archiv für El. **2**, 518 (1913).
7. RICHTER, R.: Elektrische Maschinen. Bd. I. 241 u. 275 (1924).
8. KRÄMER, W.: Die Berechnung geeigneter Nutenformen für Stromverdrängungsläufer. ETZ. I, 75—78 (1931).
9. SCHUISKY, W.: Die Stromverdrängungsmotoren. Archiv für El. **37**, 77 u. 185 (1953).
10. LAIBLE, TH.: Stromverdrängung in Nutenleitern von trapezförmigem und dreieckigem Querschnitt. Archiv für El. **27**, 558 (1933).
11. RÉTHY, O.: Der Doppelkäfigläuferinduktionsmotor. Elektrotechnika **17—18**, 132 (1932).
12. ÖRLEY, D.—JEKELFALUSSY, G.: Die praktische Bemessung der Doppelkäfigläufermotoren. Elektrotechnika **11—12**, 108 (1946).
13. Institut für Konstruktion von elektrischen Maschinen (VIFOTI): Die einheitliche Berechnungsmethode der Asynchronmotoren (1953).
14. LENGYEL, Z.: Der Entwurf von Spezialkäfigläufern (M. T. K. I. 1955).
15. CHANG, S. S. L.: A Graphical Method for Determining the Impedance of Multiple-Cage Conductors A. I. E. E. Trans. III, 621 (1953).
16. BABB, D. S.—WILLIAMS, J. E.: Circuit Analysis Method for Determination of A. C. Impedances of Machine Conductors A. I. E. E. Trans. I, 661 (1951).
17. LISKA, J.—RETTET, J.: Die Theorie der Wechselströme. Bd. II. Tankönyvkiadó, Budapest 1955.
18. KIMBARK, E. W.: Electrical Transmission of Power and Signals J. Wiley 1949.
19. SZILY, L.: Doktoratsdissertation.
20. KOVÁCS, P. K.: Betriebslehre elektrischer Maschinen. Bd. I. Asynchronmaschinen.
21. NÜRNBERG, W.: Die Asynchronmaschine 1952.
22. LISKA, J.—RETTET, J.: Die Theorie der Wechselströme. Bd. I. Tankönyvkiadó Budapest, 1955.
23. ROTHERT, H.: Über die Nutstreuung elektrischer Maschinen Archiv für El. **32**, 372—389 (1938).
24. SLATER, J. C.: Microwave transmission. 1942.
25. TUSCHÁK, R.: Stromverdrängung von in kreisförmige Nuten gebetteten massiven Leitern. Periodica Polytechnica **1** (1957).

J. RETTER Budapest, XI. Budafoki út 4, Ungarn

MIRROR MICROMETERS

By

N. BÁRÁNY

Institute for Instrument Design and Precision Mechanics of the Polytechnical University,
Budapest

(Received February 2, 1958).

Micrometer is the general designation for instruments of special construction, employed for precisely measuring fractions of angles or of lengths. These instruments fall into two large categories. The first of these categories comprises micrometers in which readings of the main scale or of fractions thereof are taken by a vernier scale sliding along the main scale. Sliding calipers, and micrometer screws belong to this first group, while slip gauges representing values which are constant and established are also based on the same principle. The common characteristic of these instruments is that mechanical reading or measurements are made by them.

The second category of micrometers is characterized by the feature that here the vernier scale, or its image, is displaced in relation to the main scale, or vice versa. The images of the scale or of the sighted point, formed by means of optical arrangements, are optically displaced in relation to each other, when the readings are taken. This is achieved by bringing into coincidence the images of different position of the sighted point. The instruments working on this principle are the optical micrometers proper, also called *compensators*, to distinguish them from the micrometers first referred to.

A brief survey of the history of micrometers is presented before proceeding to the description of mirror micrometers.

According to literary records, the first, rather simple micrometer should be credited to Montanari, dating back to 1674. It consisted of a scale engraved into a glass plate and placed in the focal plane of the objective of a simple astronomical telescope, fractions of the scale being so related to the focal length as to produce certain angular values in the object field. While the working principle of this instrument was strictly adhered to, with the passage of time the instrument itself underwent many changes. It is still in use for measurements of less accuracy, such as *e.g.* measuring target distances and target dimensions with the aid of prism binoculars. However, the results in this manner arrived at should be considered as estimates rather than measures.

If, however, the image of the scale is projected onto the field of vision, instead of on the scale itself, the process is termed autocollimating angular measurement, a method still widely used in goniometres.

The movable-hair-micrometer, designed by Gascoigne in 1640 — independent of Montanari — marks a distinct advance. In this instrument the means of measurement is a stadia line fixed on a carriage or nut arranged in the image plane of a surveying telescope. The nut can be shifted by means of a leading screw of high precision. Fractions of one revolution of the leading screw can be read off a graduated drum, keyed to one end of the leading screw, but adjustable. The readings of fractions are also taken by estimation.

The accuracy of movable-hair-micrometers mainly depends on the accuracy of the pitch of the leading screw. Errors of the pitch run can be either



Fig. 1. Super positioning field of view

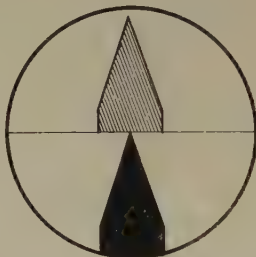


Fig. 2. Field of view with separating line

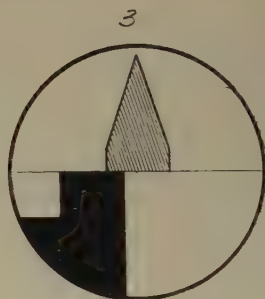


Fig. 3. Field of view with separating line, with the image cut in two

continuous or periodical. Another factor responsible for the accuracy is the appropriate bearing of the carriage, and the precise run of the leading screw.

The most up-to-date type of movable-hair-micrometers is the Bauersfeld spiral micrometer, in which no complicated mechanical means is required for displacing (controlling) the stadia line. In another known design displacement is effected by means of a cardioid cam.

There are, of course, various existing types of movable-hair-micrometers. For fuller particulars, reference should be made to pertinent literature [1].

Let us now revert to the type of instrument referred to above, in which measurement is effected by the relative displacement of the two images of the sighted point, achieved by optical means. Accuracy of measurement is obviously depending on the precise coincidence of the images. Hence, in the course of time due consideration was given to the shape, dimensions and the precincts of the object to be measured, as well as to the various aspects of the mental process of human vision, many of which are still unaccounted for.

Considering the oldest and most simple design of such an instrument, the two objectives form two images of similar construction and magnification in the field of vision of the instrument (Fig. 1). Taking an instrument adjusted to infinity, the images are in exact coincidence, while their relative displace-

ment increases with the target distance. Coincidence is achieved by using any kind of an optical micrometer referred to above.

For obtaining more accurate results, one can horizontally divide the field of vision (Fig. 2), the two images are then formed in the thus obtained two fields. Since a constant mark is required for bringing the images into coincidence, it is advisable to divide the image by a parting line as represented in Fig. 3. If the second image is an inverted mirror image of the first, accuracy can be further improved. (Fig. 4).

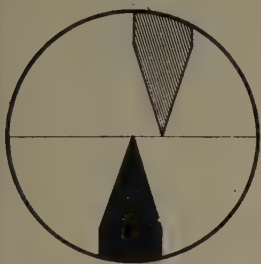


Fig. 4. Inverted coincidence field of view

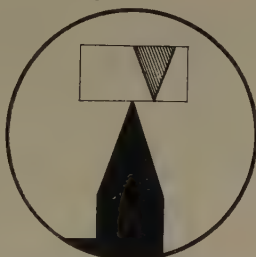


Fig. 5. Window field of view

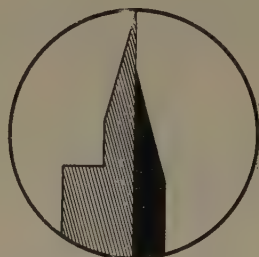


Fig. 6. Field of view with vertical separating line

The precincts of the point to be covered often disturb measuring. The so-called window fields of vision (Fig. 5) utilize only a small portion of the inverted mirror-image for coincidence.

For the purpose of measuring certain objects or portions of the field, vertical division of the image is preferred, for instance in naval range finders (Fig. 6). Some designers have extended the principle of the window field to cover the full breadth of the field of vision. This results in the so-called horizontal or vertical band field of view. The most frequent type is of the inverted coincidence kind, but there are, of course, instruments with entirely different fields of vision designed for special purposes. The two images are produced by a prism system provided with two objectives of equal relative apertures and equal magnifications.

For bringing into coincidence the image pairs displaced in the function of distance is largely achieved by inserting an optical element, such as a lens or wedge, into one of the objectives path of rays.

Lens micrometers, in most cases consisting of two components, such as the Abat micrometer designed in 1777, are applied in photographic cameras and in range finders of a short internal base line. As references to these instruments are rather scarce in literature, it was found advisable to give their brief description.

The refractive indices and the radii of curvature R of the two lenses represented in Fig. 7 are equal. In a normal position, the plano-convex and

plano-concave lenses if not separated by air form a planoparallel plate ABCD. In this position, beams coming from infinity pass the plate unrefracted, hence, undeviated. If, now, the plano-convex lens is rotated about its centre of curvature O through an angle α , the axis point E_1 is shifted to E_2 , hence, the wedge angle φ is changed. This type of system can, therefore, be called a prism of variable refractive angle.

Another Abat lens micrometer is illustrated in Fig. 8. It is of an even simpler construction, one of the lenses being displaced along a common contacting plane surface. The plano-convex lens alone condenses the pencils incidentally parallel to the axis in the focus F . Inserting a negative lens of

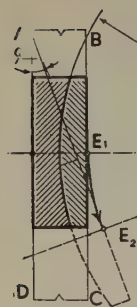


Fig. 7. Abat rotatable lens micrometer

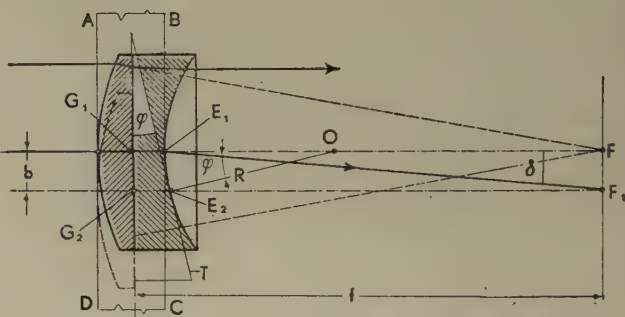


Fig. 8. Abat sliding lens micrometer

similar focal length and refractive index, the emerging pencil leaves the system parallel to the axis, an arrangement representing a simplified version of the common opera glass. Let us displace the positive lens by a length b . G_1 , along with the optical axis, will then be displaced to G_2 , and the emerging pencil refracted at E_2 will travel over focus F_1 . When emerging, the parallel incident rays run parallel to the line E_1F_1 . The tangent T laid across point E_2 of the radius of curvature R , having a centre O , makes a prismatic wedge angle with the common surface of the lenses, subject to the rate of displacement. The angle φ continually varies with the displacement of the positive lens, so that the emerging ray has a deviation δ .

Deviation can be produced either by tilting an optical plate, but is largely made by inserting a prism of small refractive angle, a so-called wedge. In the simplest case, represented in Fig. 9, the wedge 1 , having a refractive angle φ , is rotated about the optical axis, vertically to its principal section. In a basic position, the wedge will cause the incident rays to be refracted at F_1 , and the emerging ones at G . The resulting difference δ in the direction of the ray causes point B in the receiving plane to be shifted to point A . Swinging the wedge about the optical axis, A rotates in the same direction, and with the same an-

gular velocity as the wedge, thus tracing a circle $AECDA$. Hence, the path of the image is not rectilinear but circular, with the result that measuring becomes impossible.

Let us now place behind prism 1 a wedge 2 of similar refractive angle and refractive index, and let the two rotate in opposite directions, but at similar angular velocity. This system has been widely used, also as a prism of variable refractive angle. The basic concept goes as far back as the 1777

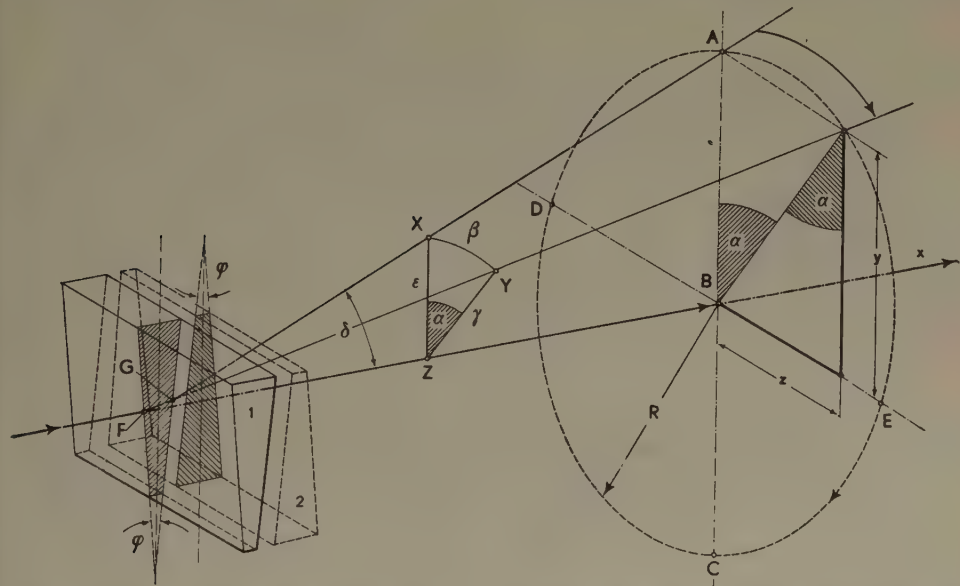


Fig. 9. Effect of wedge and wedge pair on deviating the path of rays (Boscovich pair of wedges)

Boscovich principle. It is sometimes called a Herschel—Rochon prism, yet we believe the first inventor₂ to be Boscovich.

As can be seen in Fig. 9, incident rays refracted by the wedge 1 swung about its axis, trace a conical surface having a base of radius R and a peak G , in the plane perpendicular to the axis. Assuming the maximum deviation taking place in the planes X and Y , the deviation of the wedge turned through an angle α , may be resolved to two components. From the triangle XYZ

$$\sin \alpha = \sin \epsilon \cdot \sin \alpha$$

in the case of small angles ϵ and γ

$$\epsilon = \gamma \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

also

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \gamma \cdot \cos \alpha$$

and in the case of small angles β and γ

$$\beta = \gamma \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Let us place behind wedge 1 a wedge 2 of equal refractive angle and refractive index. Turning the two edges in opposite directions, but at equal angular velocity, the deviation is

$$\delta \sin \alpha + \delta \sin [-\alpha] = 0 \text{ in the plane } xy,$$

and

$$\delta \cos \alpha + \delta \cdot \cos [-\alpha] = 2\delta \cdot \cos \alpha \text{ in the plane } yx \quad (3)$$

The maximum deviation in the plane xy is (2δ) , when $\alpha = 0$, and $(2\delta \cdot \cos \alpha = 0)$ when $\alpha = 90^\circ$. The horizontal component z independent on the sign of the angle of rotation. Turning the wedges through an angle α from the position associated with the maximum deviation, the deviation will be

$$\delta = 2\alpha \cdot \cos \varphi$$

and will take place in the plane of maximum deviation. If the refractive angles of the two wedges are not equal, the deviated sighting line describes an elliptic cone. Such an error also occurs if the angles of incidence and emergence of the two wedges are not quite equal. As the distance between the pair of wedges located behind the objective is in proportion to the distance of said pair from the focal plane of the objective, the image displacement occurring on the rotation of the wedges, is not uniform. Hence, the rotating pair of wedges as a compensator only, be placed in front of the objective, in other words, it can only be used in parallel radiation.

The principle that governs this type of instrument is unaffected by the method applied for driving the wedge pair. Fig. 10 shows the driving mechanism for a rotating pair of wedges, designed for a Zeiss range finder of 2 m internal base line. Image displacement or coincidence depending on the distance to be measured, the driving mechanism is provided with graduations empirically established and representing the distance. A cardan shaft connects the driving shaft 11 with a graduated cylinder situated at some distance. Driving takes place in the following manner: By means of the gear 9 and pinion 14 visible behind it the gear 13 keyed to the shaft 11 drives the drum, this latter bearing the scale divisions standing for distance. The pointer 7 engaging the spiral groove of the drum slides into the dove-tailed guide 8. Readings are taken by the mark engraved at the end of the pointer. External readings are taken by the graduated drum. At the same time, gear 15 turns gear 12,

whereupon gear 17 fixed on the shaft 16 drives gear 6 fitted on the mounting of one of the wedges. Gear 17 drives the gear 18 in an opposite direction, which in turn rotates the other wedge mounting provided with gear 5, in opposite direction to gear 6, but at equal angular velocity. The rotation of gear 5

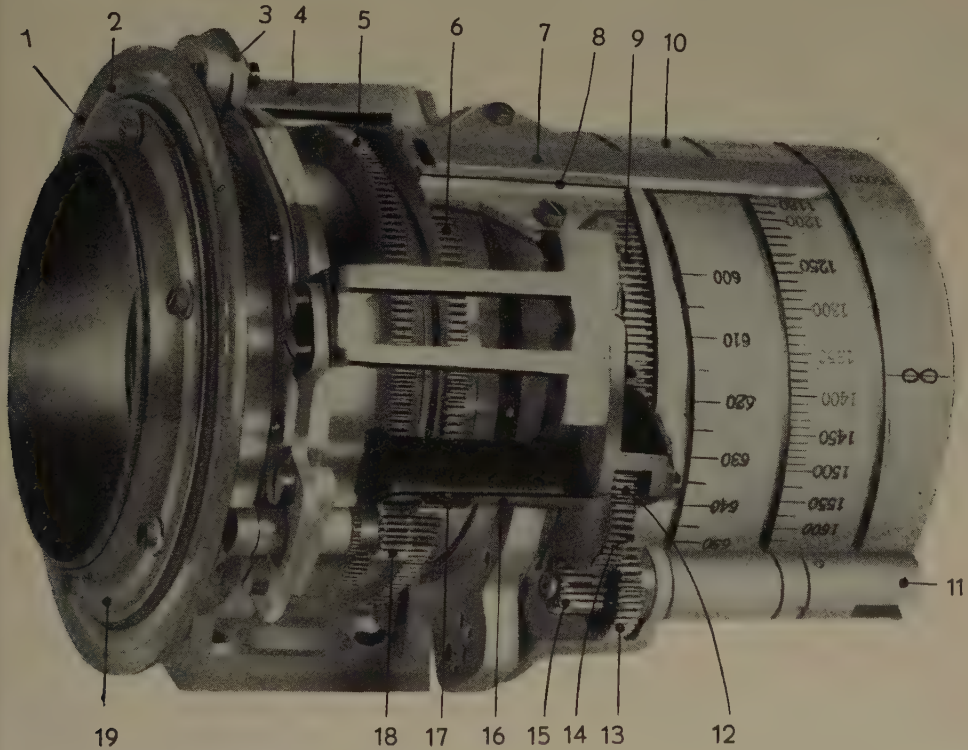


Fig. 10. Rotating pair of wedges with internal and external reading for a Zeiss range finder with internal base line

is also transmitted to the glass ring 7 bearing divisions 2 microphotographed on it. The glass ring is fixed on the mounting by means of ring 19. The lens arrangement in mounting 3 behind the ring forms an image of the scale divisions, in an appropriate place, for the instrument's field of view. Hence, the observer is able to take the reading immediately on actual measurement. The principle of internal reading is represented by the glass ring. — The whole equipment is enclosed in the casing 4.

The deviation of rays produced by the rotating pair of wedges has two peaks in relation to the optical axis. Assuming a continuous and uniform rotation of the pair of wedges, the object point is displaced on the screen within the limits *A* and *C* (Fig. 11). This suggests harmonic oscillation, as the path

of the point may be considered as horizontal projection of a point moving at uniform speed along a circular path, the speed in point A and C being $= 0$, and reaching its maximum at point B . The curve of deviation, as a function

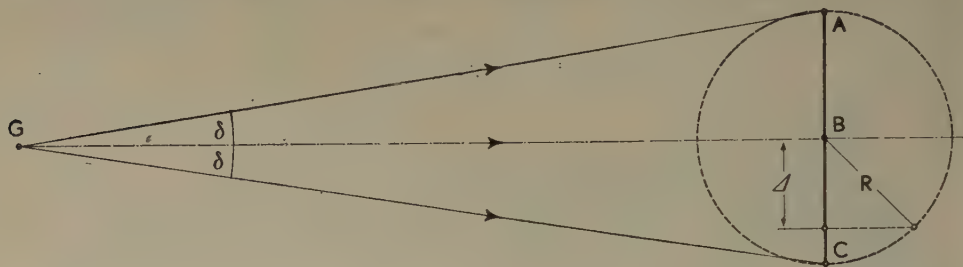


Fig. 11. The two peaks of deviation caused by a rotating pair of wedges

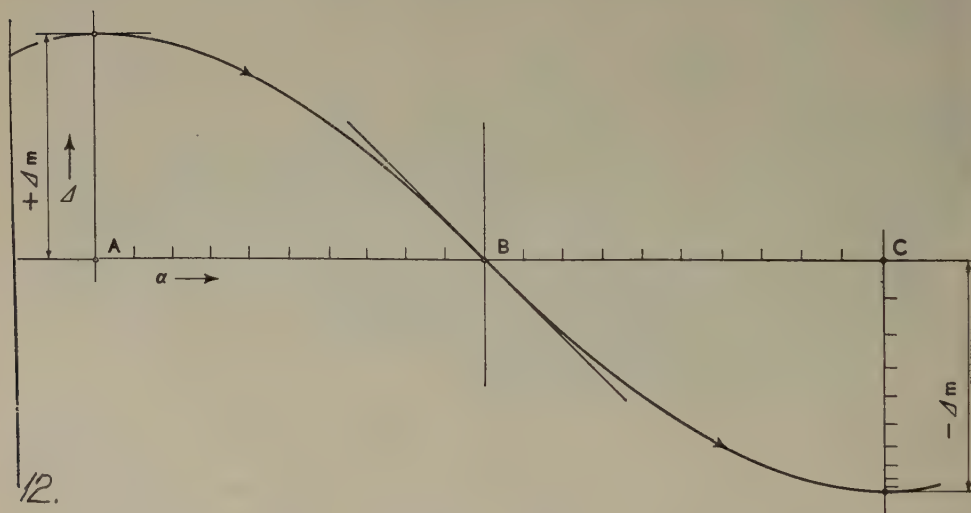


Fig. 12. Curve of deviation, as a function of angles of rotation

of the uniform angles of rotation α , is shown in Fig. 12. The extent of utilization of the curved section between the peak and the minimum is subject to the field of application of the instrument, which may be used for short range (surveying) measurement purposes, or for measuring long distances, like in military range finders. In neither case can the entire range of the curve be utilized. Along a small portion, in the vicinity of points A and C , the deviation Δm of the deviated point is practically in proportion to the uniform rotation, while deviation rapidly decreases in the precinct of the extreme values. The growing density of divisions thus arising makes reading extremely difficult. In other words, deviation is very small near the peaks, assuming uniform angles

It is quite suitable for both internal and external readings, and its design is much simpler than that of a rotating pair of wedges.

Various other more or less different versions of image displacement by means of wedge pairs are known. Their detailed description would, however, fall outside the scope of the present paper.

Conclusion

Wedge pair arrangements entail the following inconveniences, particularly with respect to image formation:

1. Even wedges of small refractive angles tend to resolve achromatic light into a spectrum, a phenomenon which, while not too disturbing for small refractive angles, makes measuring rather inconvenient for refractive-angles of some magnitude. To avoid this, wedges of high refractivity are produced by cementing wedges of different refractive indices. Since, however, actually only two wave lengths of the spectrum can be merged by using two types of glass, the disturbing effect of the secondary spectrum should be taken into account for such achromatic wedges, if measurement is to be of high accuracy.

However, the manufacture of achromatic wedges is not easy. It is essential that the refractive angle of both components should lie exactly in the same direction, — therefore, the use of a cementing collimator is required. Notwithstanding the utmost care devoted to the process of cementing, the constancy of the system is not satisfactory. This has given various researchers the idea of connecting the wedges by adhesion. When two components of plane optical surfaces are superposed, air is driven out from between them, so that atmospheric pressure combined with molecular effects cause the two surfaces to adhere to each other. Difficulties may arise with changes of temperature. Owing to the different heat expansion coefficients of the components and to gravity, the components may under certain conditions separate.

2. Oblique rays incident to an optical plate or a wedge, suffer displacement or deviation while the image is afflicted with astigmatism. The sagittal and tangential images are situated at different points of the axis. This so-called astigmatic difference is independent of the object distance for an optical plate but depends on and increases with the thickness of the plate. A similar phenomenon can obviously be observed in connection with pairs of wedges, but here the astigmatic difference is correlated to the object distance. The shorter the object distance, and the larger the refractive angle φ , the greater the astigmatic difference. The path of the rays through the wedges is one of the components responsible for astigmatic differences, this difference, of course,

increases with the thickness of the wedge. Astigmatism, therefore, varies with the length of the path of rays over the wedges.

3. Even for the simplest type of wedge pairs, four surfaces will unavoidably be in contact with the air, leading to a certain loss, due to surface reflection. It is, however, possible to reduce this loss somewhat by applying an anti-reflection surface coating.

4. Adequate image formation can only be expected from wedges bounded by precisely ground surfaces. If the wedge surfaces are not perfectly plane, the wedges will act like condensing or dispersing lenses, thus impairing uniform magnification of the images. This error, in itself, however small, contributes to aberrations of the image.

These aberrations increase with the refractive angle and with the thickness of the wedge and, in addition, their value varies in the course of rotation, a phenomenon apt to lessen the accuracy of measurement. There is no need for emphasizing the difficulties connected with adjustment to sharpness, particularly for long distances. Obviously, the slightest aberration in image function renders measurement inconvenient, not to speak of external influences affecting operation.

II.

The necessity of designing an instrument based on the principle of rotating wedge pairs, but freed from the aberrations referred to above has been felt, and an arrangement produced in which the incident light, instead of being deviated, is reflected with the aid of mirrors. A mirror micrometer of this kind is illustrated in Fig. 14 and is described below.

The mirrors are so arranged that their principal section make an angle of 45° to each other, the system thus obtained corresponds to the penta mirror of constant deviation, known in surveying practice. It will later be explained why this particular system as a starting point was preferred.

To obviate refraction, the facing surfaces BC and EF of the mirrors 1 and 2 subtending a 45° angle φ are anti-reflection coated. The ray J incident on BC is reflected at point K and strikes the surface EF whence it is once more reflected at point L , the angle of reflection being equal to the above angle. As the ray emerges from the system, it subtends a 90° angle at O with the incident ray. If, now, the air space between faces BC and EF is filled up with a glass block (bounded by a broken line in the figure) the known penta prism is obtained.

The penta prism is frequently applied for range finders of internal base line, taking the great advantage into account that incident and emergent rays always square with each other when the mirror system is rotated around its axis O perpendicular to the base plane, although their points of intersection vary.



Fig. 15. Zeiss penta mirror mounting

surfaces a , a distance of the distant operating surfaces b , and a distance c between a and b , then, in the case of a uniform drop of temperature Δt from a toward b , the penta mirror suffers a change of angle that is, about 4.8 seconds from $t = 1$ Centigrade.

$$\Delta y = \frac{a \cdot \Delta t (a+b)}{2c} \quad (5)$$

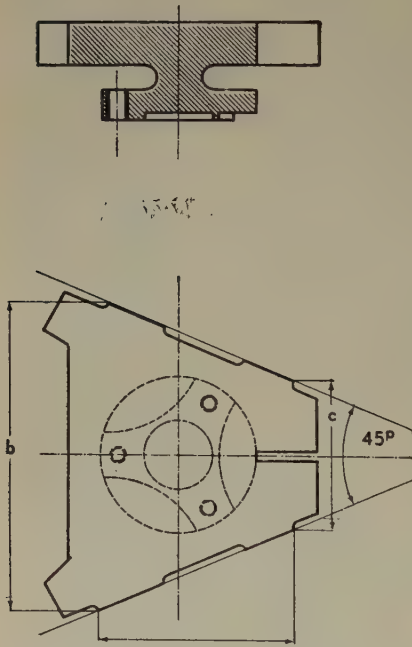


Fig. 16. Diagram of Zeiss penta mirror mounting

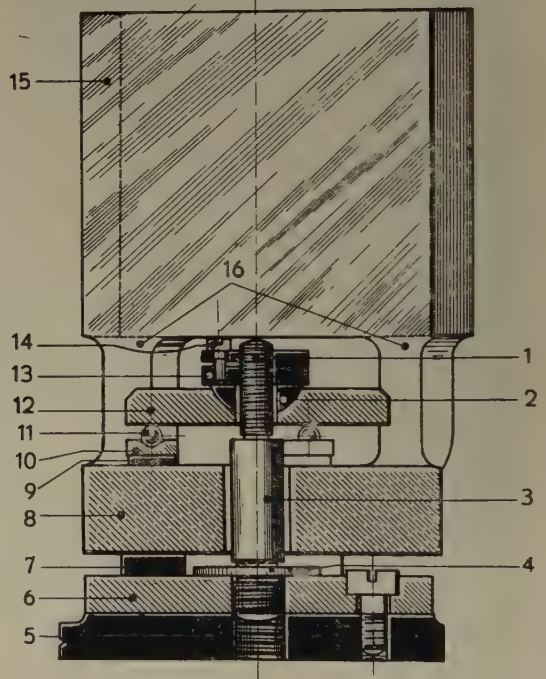


Fig. 17. Zeiss one-piece penta mirror

The mirror mounting above referred to was further developed by the Zeiss Company. Fig. 17 illustrates a section of it which from the viewpoint of precision mechanics is very instructive. The mirror 15 is connected to the glass mounting 8 by thin legs 16. The nut 13 screwed on the threaded portion 1 of the leading screw 3 presses on disc 12 with the aid of a spherical washer 2. Pressure of the disc lying on the balls 11 is translated through washers 10 to the rubber washers 9, pressing the mounting 8 against the rubber washers 7 placed on the base plate 6. The leading screw 3 screwed into the base plate 6 rests on the disc 4 of a larger diameter. The whole system can be fitted on to a part of the instrument with three screws. Nut 13 is slit, and its two halves resiliently use the screw 14 driven through it.

The Goertz mirror mounting represented in Fig. 18 has a different, but equally ingenious design. Mirror 2 and the components required for fixing it were in the figure removed. The mirrors 1 and 2 engage the optically ground surfaces 3, 4 and 5 of the mounting. The fixing jaws 11, 12, 13 and 14 tightly held by the screws 9 and 17 serve to eliminate lateral displacement of the mirrors. The plate 19 with its short, rounded off legs 15, 16 and 17 is attached to the back surface of the mirrors, and is held in place by the screw 6 threaded into fork 8 arranged on the mounting, and protruding into bore 18 of the plate.

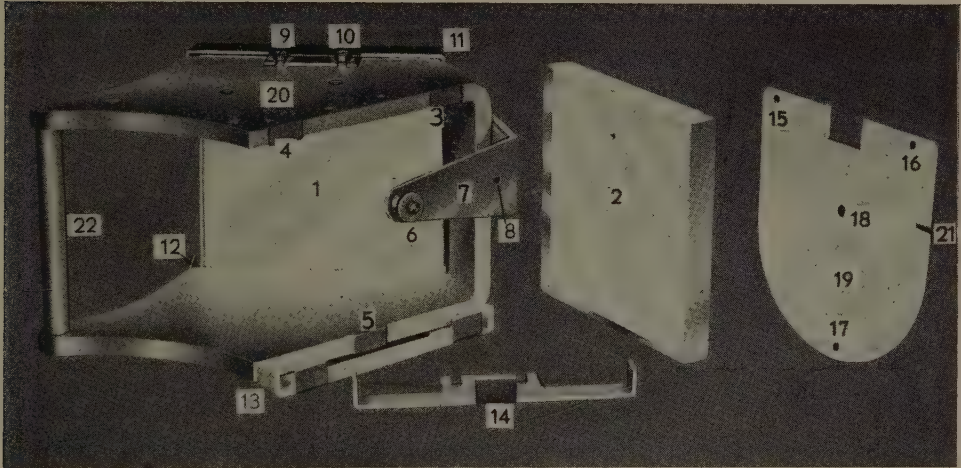


Fig. 18. Goertz resilient penta mirror mounting

A pin 8 extending into hole 20 and fixed to fork 7 secures the plate 19 against turning. The two ends of the mirror mounting 21 are rigidly connected by rod 22.

III.

The use of the penta mirror as an optical micrometer is subject to the condition that the reflecting surfaces — as in the case of an instrument for setting out right angles — should be so swung in relation to each other so as to convert them into a rotating pair of wedges of variable refractive angles. To achieve this, the two wedge-shaped, externally coated mirrors 1 and 2 illustrated in Fig. 19 are rotated — in opposite direction to each other — around the axes T and T_2 -normal to their exterior faces. The penta mirror is thus converted into a penta micrometer, similarly to the pair of wedges by Boscovich.

In the initial position as shown in the figure, the system represents a common penta mirror, for the faces of the mirrors 1 and 2 make a 45° angle

in position I. The rays arriving from direction J are twice reflected and emerge in the direction J_1 . The incident and emerging rays subtend a 90° angle at O .

Turning the mirrors into position II, the incident ray is reflected at point A of mirror 1, then at point A_1 of mirror 2, and finally emerges towards J_2 .

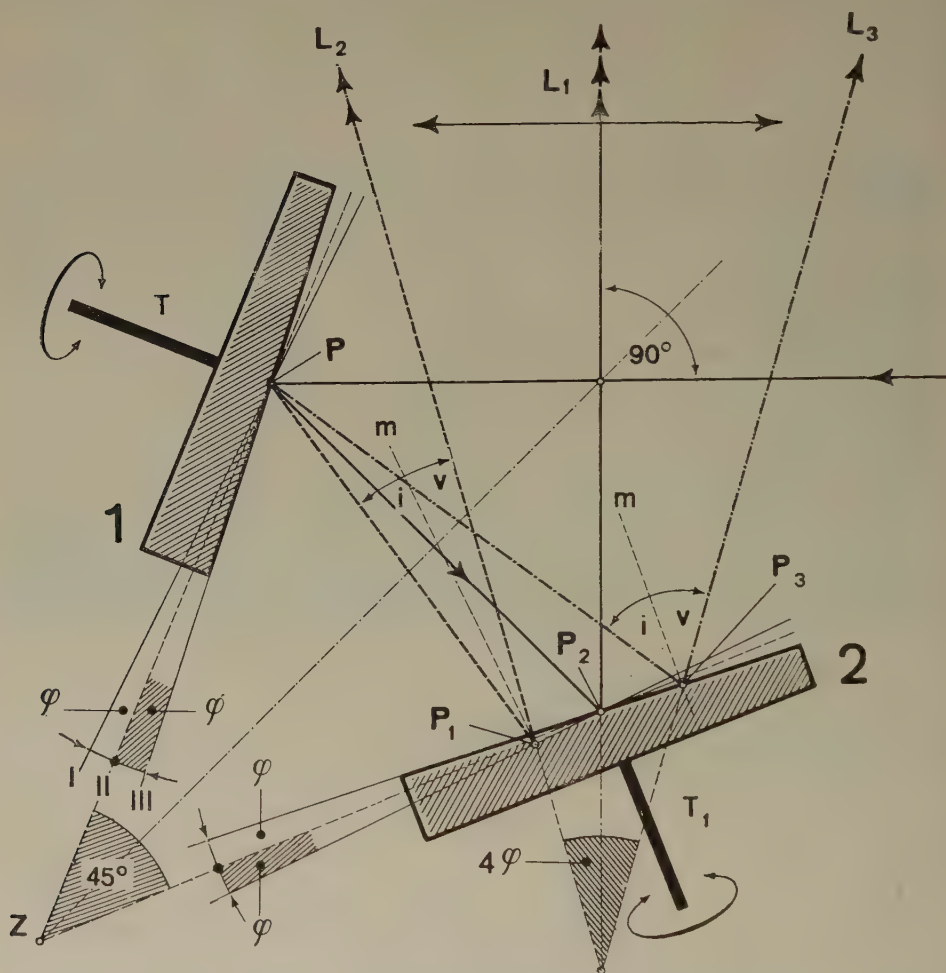


Fig. 19. A simple penta mirror, used as a mirror micrometer

If the mirrors are turned in an opposite direction, the ray will suffer a deviation from position I to position III in accordance with the arrow. In the latter position the light is reflected at point A_3 (mirror 1) and at A (mirror 2) and emerges toward J_3 .

The deviation of the reflected rays shows that the penta mirror thus converted can replace the rotating wedge pair, while retaining its quality

as an instrument for setting out constant directions and securing a constant sighting line.

The rays reaching the mirror system are reflected — without being refracted — by an air-contacting surface coated with aluminium or with some other metal. Hence, the instrument is free from the errors and aberrations in connection with rotating pairs of wedges referred to above.

Considering the path of rays, one finds that the rotation of the mirrors results in a change of the side lengths of the triangle abc (Fig. 20) which in

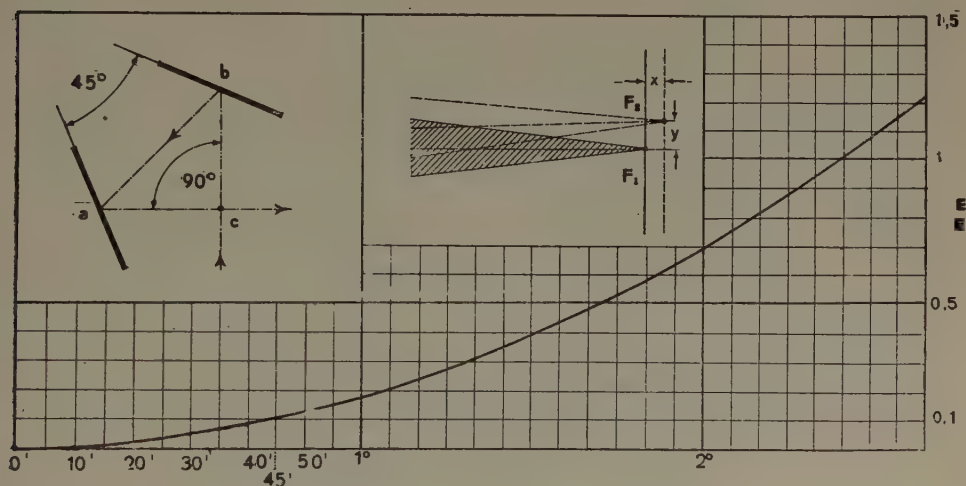


Fig. 20. Displacement of image plane resulting at the rotation of the mirror micrometer

turn means, that the image formed by the objective, that is, the focus F_1 , travels to F_2 , displaced by a length x along the axis. The value of x varies in accordance with the curve shown in Fig. 20 for a range finder of 0,3 m internal base line. The human eye being unable to perceive a parallax of 0,1 mm, this error does not involve inaccuracy of measurement for small mirror angles.

A laboratory model of the instrument is represented in Fig. 21. It must be emphasized that the instrument is only suitable for test purposes, as the gear mechanism drive is not able to achieve the required accuracy. In addition, the error becomes greater in accordance with formula (5).

$$\Delta y = \frac{a \cdot \Delta t (a + b)}{2c} \quad (6)$$

Apart from the mode of drive applied, correction is to be sought by selecting suitable materials and shapes, as well as appropriate heat insulation me-

thods. Finally, it must be kept in mind that all mirrors are afflicted with a certain amount of wedge error which is apt to arise on rotation. It is, therefore, advisable to take twice this error into account.

The mirror micrometer, when used as a penta micrometer for range finders of internal base line is a combination of the penta mirror and the rotating pair of wedges. It can also be suitably used in all instruments based on the principle of micrometer measurement by means of optical deviation of the direction of the radiating energy.

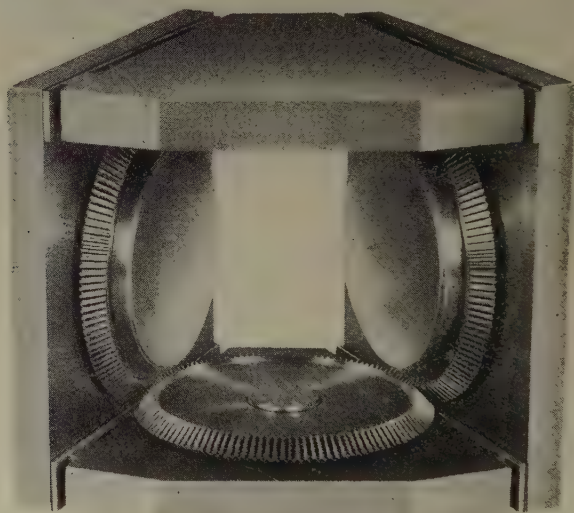


Fig. 21. The penta mirror as mirror micrometer

It has already been mentioned that the displacement of the length of the path of rays in the case of rotation, as a function of the angle α in basic position, that is, if $\alpha = 0$,

$$x_{\alpha=0} = a \cdot \left\{ 2 + \sqrt{2} - 1 + \left[1 - \left(\frac{\operatorname{tg} 45^\circ - 1}{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 22,5^\circ} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 45^\circ} \right) \right] \right\}.$$

If α varies, the displacement of the image is 2α . Thus one can write that

$$x_\alpha = a \left\{ 2 + \sqrt{2} - \left[1 + \left(1 - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + 2\alpha - 1}{\operatorname{tg} 45^\circ + 2\alpha + \operatorname{ctg} 22^\circ 30' + \alpha} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 45^\circ + 2\alpha} \right) \right] \right\}$$

The location of the mirrors or wedges depends on the principle of the instrument's construction. Fig. 22 shows an embodiment in which the mirrors 1 and 2 are situated beside each other. In this case, however, a third auxiliary mirror 3 is required. In another version the mirrors face each other at optional distances, with their axes laterally displaced in relation to each other. The laboratory scale model shown in Fig. 22 applies plane parallel plates with front metal coating, the wedge angles are determined by the tilting of the

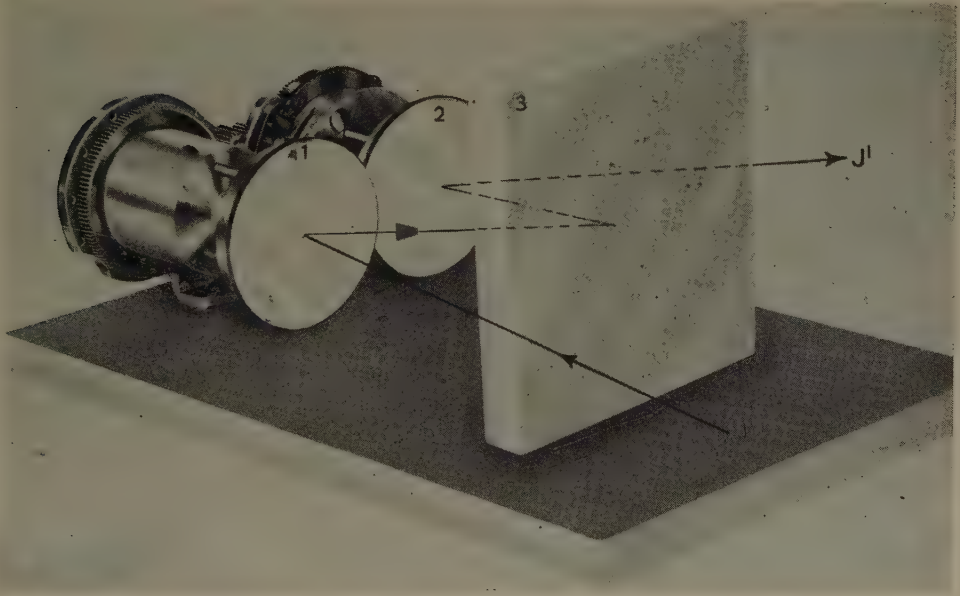


Fig. 22. Mirror micrometer with auxiliary mirror and parallel shaft drive

mirrors with a micrometer. This method is able to secure the wedge angles required for research purposes.

It is to be noted that in addition to rotating pairs of wedges and sliding wedges, other wedge combinations may also be used for measuring small angles. The pair of sliding wedges of equal refractive angles and refractive indices, but opposite in position, is an arrangement similar to the Maskelyne type sliding wedge pair. The Colzi swinging pair of wedges comprise two prisms of equal refractive angles and refractive indices, arranged around the two axes; the wedges can be opened and shut like a pair of scissors. Systems like the Barr and Stroud arrangements have a wedge pair situated behind the objective, with an opening smaller than the free aperture of the objective. While the beams suffer no refraction at the centre of the objective, they are deviated at the margins of the ring-shaped wedges, in accordance with the

position of the wedges. Another design presents pairs of wedges with no aperture, but a smaller diameter than the free aperture of the objective.

The measurement of small angles is not the sole field of application for mirror micrometers. They are adapted for various other purposes, such as *e. g.* the adjustment of revolution numbers. When keeping the revolutions of two electric motors at constant values, one may make good use of the Lissajous figures. The derivation of this phenomenon is strictly in the scope of physics, so that we shall restrict ourselves to considering the underlaying principle.

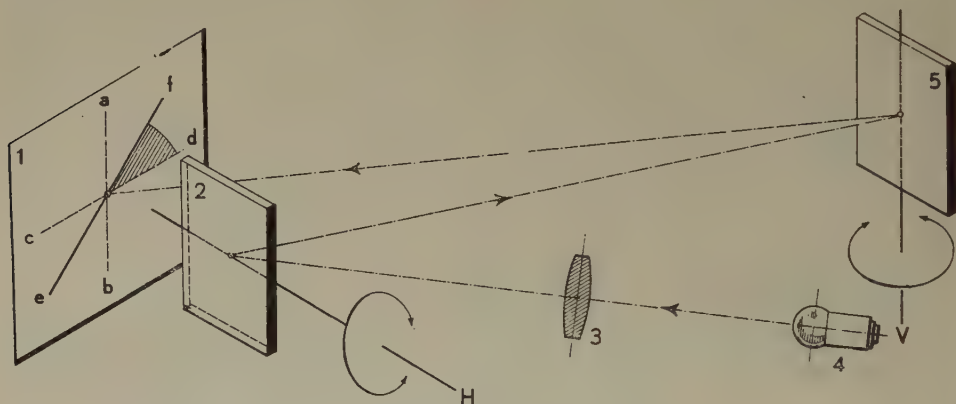


Fig. 23. Resultant path of point, due to oscillation of two mirrors with mutually perpendicular axes

It has been stated above that in the mirror micrometers emerging rays are displaced along a straight line in accordance with the special location of the mirror arrangement. Let us place a second mirror system behind the first, in such a manner, that the rays emerging from the first should travel through the second system; and let the principal section of this latter system be normal to the principal section of the first. If, now, the mirror pairs rotate independently of each other, the point of intersection of the emerging rays will trace a curve corresponding to the resulting motion. This curve can be established either by computation or by graphical construction. This latter method has been applied in the following example, let us consider two mirrors oscillating about two rightangled axes (Fig. 23). Lens 3 forms an image of the filament of the low-voltage incandescent lamp 4 on screen 1, the rays having been reflected by mirrors 2 and 5. Mirror 2 oscillates around the horizontal axis *H* while mirror 5 performs rapid oscillations around the perpendicular axis *V*. The curve depends on the oscillation number, on amplitude and on the phase difference.

Fig. 24 shows the graphical construction of the curve. For this purpose, the circumference of the circle was divided into 24 parts, and the division

points were connected by horizontal and vertical lines. If mirror 5 is stationary (Fig. 23), but mirror 2 oscillates around axis H, the point traces the line ab on the screen, whereas with the mirror 2 being stationary and mirror 5 oscillating about the axis V, the line cd is traced. Both oscillations produce a resulting motion. Once more considering Fig. 24, the point passes along the line AB in its horizontal course, and along line CD in its vertical course, both courses in one oscillation requiring equal periods of time. The point starting from O reaches 1 during $1/24$ th part of the oscillation period, it reaches 2 during

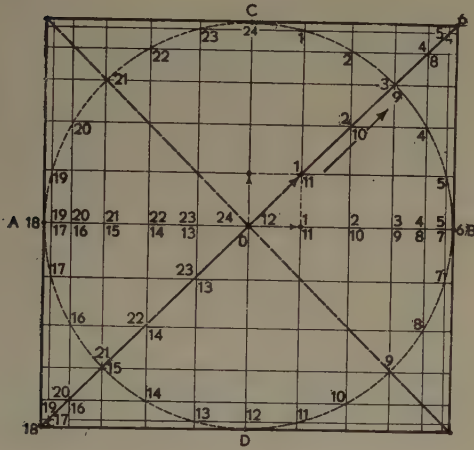


Fig. 24. Graphical construction of the path of the oscillating point

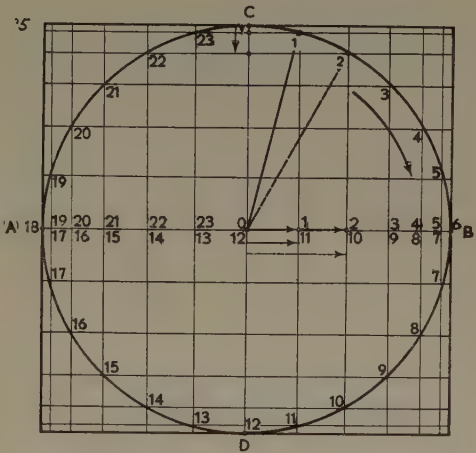


Fig. 25. Circular path: phase difference $N = 1 : 4$

$2/24$ th parts, etc. The same applies to the vertical motion. If the point starts from O both in the horizontal and vertical direction at the same time, then its course can be readily plotted and its location determined during any given 24th part of the oscillation. The path of the point will follow the diagonal of a square.

Therefore, the oscillation number of the two mirrors is equal. For a phase difference of $N = 1/2$ — that is, oscillation of the one mirror starting when the other mirror has already completed one half oscillation — the resulting path of the point is once more, a straight line, only perpendicular to the former one.

Considering a phase difference of $N = 1/4$, represented in Fig. 25, the vertical motion will have brought the point to C when the horizontal right-handed motion begins. The motion downward from C is superposed on the right-hand motion, and arrives to 1 during $1/24$ th part of the oscillation period.

If one continues the plotting, one finds that the point traces a circle $CBDAC$. Reaching point B , the right-hand motion changes to the left. For a phase difference $N = 3/4$, the point runs along the circle in an opposite sense.

Considering a phase difference of $N = 1/8 = 3/24$ (Fig. 26), the point will have left points a , b and c on its upward course, when starting on its horizontal motion at c . Plotting the path of the point yields an ellipse, and again one of opposite direction for $N = 7/8 = 23/24$. Each phase difference results in an ellipse of different eccentricity.

Starting from a phase difference of $N = 0$ and taking steadily increasing phase differences, the straight line is converted into first a flat then a broader ellipse, then into a circle, and finally into an ellipse of opposite direction,

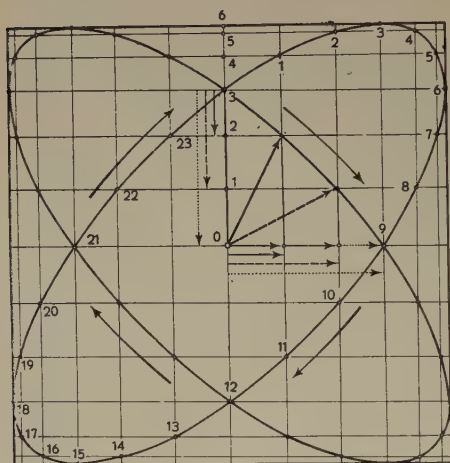


Fig. 26. Elliptic path; phase difference
 $N = 1 : 8$

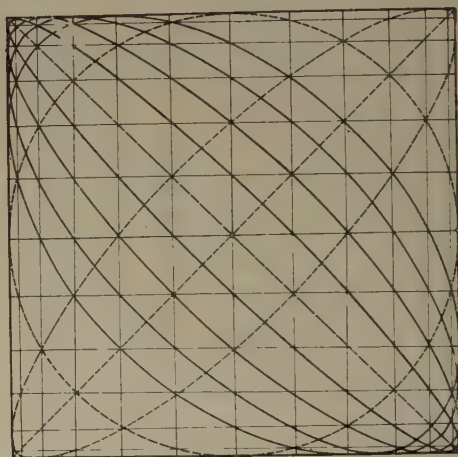


Fig. 27. Paths of rays obtained with
continually increasing phase differences

giving the impression of an ellipse swinging about its own major axis. (Fig. 27). Every phase difference is associated to a certain curve, and the rate of variation depends on the duration of oscillation.

From the above brief description it follows that it is possible to produce oscillation figures by means of two penta mirrors so located that their principal sections are normal to each other. The curves traced on the screen by the ray travelling through and emerging from the two systems during rotation of the mirrors correspond to the amplitude, the oscillation or revolution number and to the phase number. If the r. p. m-s are equal, the course of the ray is a straight line subtending a 45° angle with the horizontal.

Applying this principle for securing the constancy of speed of two electric motors, two separate mirror micrometers can be operated. The emerging rays are directed to a slot-shaped photocell, the effective surface of which corresponds to the cross-section of the pencil of rays. On the event of equal r. p. m-s, the straight line traced by the luminous point will entirely cover the effective surface of the cell. As soon as the r. p. m-s are different, the

straight line emerges from the slot, and the point traces the curves referred to above. Thereupon, an electric apparatus controlled by the photocell adjusts the r. p. m-s of the lagging or too speedy motor.

Let us now consider the accuracy of the instrument, that is, determine the lowest difference in r. p. m-s to equipment is still responsive. Taking two motors with revolution numbers of 400 and 400.1 per *second*, there is a difference of $\frac{1}{10}$ revolutions per *second*. Therefore, in 10 seconds the Lissajous-figure will have performed a full revolution, comprising all possible phase differences. Let us take another case where the Lissajous-figure is completed in one minute only. It follows that while one motor makes $440.60 = 26\,400$ revolutions, the other performs 26 401. The ratio between them is 26 401 to 26,400 = 1,000 038. Thus, this method is adaptable for determining very small differences of revolutions and it is possible — employing appropriate electric or electronic equipment — to keep the revolutions at constant values. The above description makes it clear, that the operation of this instrument is entirely automatic.

Summary

Some of the known micrometers for measuring small angles and short distances have been described above. An attempt was made to replace the 200 years old Boscovich rotating pair of wedges by a mirror micrometer. In the new instrument a mirror micrometer is used as a penta mirror, thus associating the penta mirror with the rotating pair of wedges. Its accuracy depends on two factors: the mode of drive on one hand, the deformation of the mirror mounting owing to changes of temperature on the other. As regards the mode of drive, a gear mechanism can only be applied on a laboratory scale, as it does not give a satisfactory accuracy in the transmission of angles. Therefore, one has to apply other modes of drive.

Temperature influences can be felt by the mirror mounting, generally used for penta mirrors too. It is therefore essential to provide for heat insulation, and to resort to the most careful methods manufacture.

References

1. BECKER, H.: Feinmessokulare. Mikrotechnik III—IV, V—VI (1951).
BERNDT: Technische Längenmessungen (1929).
SCHULTZ, H.: Sehen und Messen. Ztschft. d. D. Ges. f. Mech. u. Op. (1920).
HODAM: Optische Grundsätze in der industriellen Messtechnik. Feinm. u. Präz. 197 (1920).
2. BOSCOVICH, R. G.: Account of a new micrometer and megameter. Philosophical Transactions (1777).
HERSCHEL, J. F.: Vom Licht. (1931).
ROCHON, A.: Mémoire sur la micrometre de cristal de roche, pour la mesure des distances et des grandeurs. 62 (Paris, Beraud, 1807).

Professor N. BÁRÁNY, Gombocz Zoltán utca 17, Budapest, XI., Hungary.

MATHEMATISCHE UNTERSUCHUNG DER STATIONÄREN UND TRANSIENTEN VORGÄNGE IN ELEKTRISCHEN DREIPHASENMASCHINEN MIT HILFE VON HYPERMATRIZEN

V. LOVASS-NAGY und K. SZENDY

(Eingegangen am. 4. Februar 1958)

1. Einleitung

Eine große Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten und Büchern der Fachliteratur befassen sich mit der mathematischen Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge in elektrischen Maschinen und Transformatoren [1]—[6]. Die neueren Arbeiten [7]—[17], welche derartige Berechnungen bringen, verwenden in zunehmendem Maße die sogenannte Matrizenrechnung. Diese Rechnungsart ermöglicht bekanntlich einerseits eine einfachere und übersichtlichere Schreibweise der mathematischen Darstellung dieser komplizierten Erscheinungen, andererseits ergibt sich hierbei die Ableitung weiterer Zusammenhänge, die sich ohne Verwendung der Matrizenrechnung kaum gewinnen ließen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, mit Hilfe der neuesten Resultate der Matrizen Theorie — oder besser gesagt mit Hilfe einiger neuerdings bekannt gewordenen Eigenschaften der Hypermatrizen [19] — die stationären und transienten Vorgänge dreiphasiger elektrischer Maschinen zu untersuchen.

Wir wollen unsere Untersuchungen auf solche synchrone und asynchrone Maschinen ausdehnen, deren Statorwicklung dreiphasig ist, während ihre Rotorwicklung entweder zwei- oder dreiphasig ausgeführt ist. Wir nehmen dabei an, daß der Stator nur eine einzige Wicklung besitzt, während der Rotor zwei Wicklungen trägt, was bei Synchrongeneratoren und Asynchronmotoren normalerweise der Fall ist. Es besteht jedoch ohne weiteres die Möglichkeit, die so abgeleiteten Resultate auch für Maschinen mit mehreren Wicklungen auf Stator und Rotor zu übertragen.

Für unsere Untersuchungen haben wir bezüglich der hier behandelten Maschinen folgende Annahmen zugrunde gelegt:

a) Alle 3 Phasen des Stators bzw. eines dreiphasigen Rotors sind gleichartig gewickelt und gegeneinander elektrisch um $\frac{2\pi}{3}$ verdreht.

b) Die Eisensättigung wird nicht berücksichtigt, also die Permeabilität als gleichbleibend angenommen.

- c) Die Eisenverluste — Hysterese und Wirbelstromverluste — werden nicht berücksichtigt.
- d) Der Skineffekt wird nicht in Rechnung gezogen.
- e) Leckströme (durch Ableitung) werden vernachlässigt.
- f) Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors wird als konstant angenommen.
- g) Die Feldverteilung ist im Luftspalt sinusförmig.

2. Bezeichnungen

Die gegenseitige Lage der Wicklungen von Synchron- oder Asynchronmaschinen mit zweiphasigem Rotor ist aus Abb. 1 zu ersehen, die von Maschinen mit dreiphasigem Rotor aus Abb. 2 (s. auch Fußnote ¹). Bei der mathematischen Erfassung des Problems haben wir als allgemeineren Fall einen zweiphasigen Rotor berücksichtigt. Wir werden nämlich später sehen, daß sämtliche auf zweiphasige Rotoren bezügliche Beziehungen — unter Beachtung gewisser vereinfachender Annahmen — in Gleichungen überführt werden können, die sowohl für dreiphasige wie auch für zweiphasige Rotoren gültig sind.

Den Phasenwicklungen des *Stators* (A) sind den Achsen a, b, c zugeordnet.

Im Falle eines *zweiphasigen Rotors* benutzen wir bei *Synchronmaschinen* die folgenden Bezeichnungen:

Erregerwicklung: F ,

Dämpferwicklung: D ,

Polachse in der Längsrichtung: d ,

Polachse in der Querrichtung: q (rechtwinklig zur Längsrichtung).

Die Dämpferwicklung ist tatsächlich zweiphasig und die Achsen der einzelnen Phasen fallen mit den Achsen d und q zusammen. Die Erregerwicklung ist tatsächlich einphasig und ihre Achsenrichtung fällt mit der Längsachse d zusammen. Nichtsdestoweniger nehmen wir sie als zweiphasig an und bestimmen, daß die zweite, in die Querachse q fallend angenommene Phasenwicklung als dauernd offene Wicklung zu gelten hat. Unter dieser Bedingung sind nämlich die abgeleiteten Zusammenhänge symmetrisch und lassen sich ohne Schwierigkeit auch auf asynchrone Maschinen übertragen (s. Punkt 5).

Im Falle eines *zweiphasigen Rotors* sind bei *asynchronen Maschinen* beide Wicklungen des Rotors tatsächlich zweiphasig. Im Interesse der Einheitlichkeit der für Synchron- und für Asynchronmaschinen abgeleiteten Zusammenhänge bezeichnen wir bei den asynchronen Maschinen die eine Wicklung ebenfalls mit F , die andere mit D . Obwohl im Falle von Asynchronmaschinen

¹ Der Übersichtlichkeit halber haben wir nur *eine* Wicklung des Rotors, seine Erregerwicklung, zur Darstellung gebracht.

b) Die Gegeninduktivität des Stators ist :

$$\left. \begin{aligned} l_{Aab} &= - \left[l_{Ag} + l'_{Ag} \cos \left(2\vartheta + \frac{\pi}{3} \right) \right] = - \left[l_{Ag} + l'_{Ag} \cos \left(2\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ l_{Aac} &= - \left[l_{Ag} + l'_{Ag} \cos \left(2\vartheta + \frac{5\pi}{3} \right) \right] = - \left[l_{Ag} + l'_{Ag} \cos \left(2\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ l_{Abc} &= - \left[l_{Ag} + l'_{Ag} \cos \left(2\vartheta + \frac{3\pi}{3} \right) \right] = - [l_{Ag} + l'_{Ag} \cos 2\vartheta] . \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

c) Die Selbstinduktivitäten des Rotors sind :

$$\left. \begin{array}{llllll} l_{Fd} \dots & \text{Selbstinduktivität der Phase } d & \text{der Rotorwicklung} & F, & & \\ l_{Fq} \dots & \text{,,} & \text{,,} & q & \text{,,} & F, \\ l_{Dd} \dots & \text{,,} & \text{,,} & d & \text{,,} & D, \\ l_{Dq} \dots & \text{,,} & \text{,,} & q & \text{,,} & D. \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

d) Gegeninduktivitäten des Rotors sind :

$$\left. \begin{aligned} l_{FDd} \dots & \text{Gegeninduktivität zwischen den Phasen } d \text{ der Rotorwicklung} \\ & F \text{ und } D, \\ l_{FDq} \dots & \text{Gegeninduktivität zwischen den Phasen } q \text{ der Rotorwicklung} \\ & F \text{ und } D; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

zwischen den Phasen d und q der Rotorwicklungen F und D gibt es infolge ihrer gegenseitigen Lage im Raum keine gegenseitige Induktions.

e) Die Gegeninduktivität zwischen Stator und Rotor ist wie folgt :

a) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase d der Rotorwicklung F :

$$\left. \begin{aligned} m_{AaFd} &= m_{Fd} \cos \vartheta \\ m_{AbFd} &= m_{Fd} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{AcFd} &= m_{Fd} \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

β) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase q der Rotorwicklung F :

$$\left. \begin{aligned} m_{AaFq} &= -m_{Fq} \sin \vartheta \\ m_{AbFq} &= -m_{Fq} \sin \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{AcFq} &= -m_{Fq} \sin \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2)$$

γ) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase d der Rotorwicklung D :

$$\left. \begin{aligned} m_{AaDd} &= m_{Dd} \cos \vartheta \\ m_{AbDd} &= m_{Dd} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{AcDd} &= m_{Dd} \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.3)$$

δ) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase q der Rotorwicklung D :

$$\left. \begin{aligned} m_{AaDq} &= -m_{Dq} \sin \vartheta \\ m_{AbDq} &= -m_{Dq} \sin \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{AcDq} &= -m_{Dq} \sin \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.4)$$

In den oben eingeführten Bezeichnungen bedeuten die Werte:

$$l_A, l'_A, l_{Ag}, l'_{Ag}, l_{Fd}, l_{Fq}, l_{Dd}, l_{Dq}, l_{FDd}, l_{FDq}, m_{Fd}, m_{Fq}, m_{Dd}, m_{Dq}$$

unveränderliche Größen.

Ströme und Spannungen bei Maschinen mit zweiphasigem Rotor sind die folgenden:

a) Ströme und Spannungen des Stators:

$$i_{Aa}, i_{Ab}, i_{Ac}; u_{Aa}, u_{Ab}, u_{Ac}. \quad (2.7)$$

b) Ströme und Spannungen des Rotors:

| | | |
|------------------|------|--|
| i_{Fd}, u_{Fd} | | Strom und Spannung der Phase d der Rotorwicklung F ; |
| i_{Fq}, u_{Fq} | | „ „ „ „ „ „ q „ „ F , |
| i_{Dd}, u_{Dd} | | „ „ „ „ „ „ d „ „ „ D , |
| i_{Dq}, u_{Dq} | | „ „ „ „ „ „ q „ „ „ D . |

Die Wicklungswiderstände der Maschine mit dreiphasigem Rotor sind:

$$\left. \begin{aligned} r_{Aa} = r_{Ab} = r_{Ac} = r_A & \dots \text{Widerstand der Statorwicklung,} \\ r_{Fa} = r_{Fb} = r_{Fc} = r_F & \dots \text{Widerstand einer Phase der Rotorwicklung } F, \\ r_{Da} = r_{Db} = r_{Dc} = r_D & \dots \text{Widerstand einer Phase der Rotorwicklung } D. \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Die Selbstinduktivität und die Gegeninduktivität der Wicklungen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor

Da ein dreipoliger Rotor immer Zylinderform hat (Kreiszyylinder), vereinfachen sich die Selbstinduktivität und die Gegeninduktivität gegenüber den entsprechenden Beziehungen bei Maschinen mit zweiphasigem Rotor und ausgeprägten Polen bzw. elliptischem Querschnitt, wie folgt:

a) Die Selbstinduktivität des Stators: (2.9)

$$l_{Aa} = l_{Ab} = l_{Ac} = l_A.$$

b) Die Gegeninduktivität des Stators:

$$l_{Aab} = l_{Aac} = l_{Abc} = -l_{Ag}.$$

c) Die Selbstinduktivität des Rotors: (2.10)

a) Die Selbstinduktivität der Rotorwicklung F :

$$l_{Fa} = l_{Fb} = l_{Fc} = l_F.$$

β) Die Selbstinduktivität der Rotorwicklung D :

$$l_{Da} = l_{Db} = l_{Dc} = l_D.$$

d) Die Gegeninduktivität des Rotors:

a) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasen der Rotorwicklung F :

$$l_{Fab} = l_{Fac} = l_{Fbc} = -l_{Fg}. \quad (2.11.1)$$

β) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasen der Rotorwicklung D :

$$l_{Dab} = l_{Dac} = l_{Dbc} = -l_{Dg}. \quad (2.11.2)$$

γ) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasen der Rotorwicklung F und den Phasen der Rotorwicklung D :

$$\left. \begin{aligned} l_{FaDa} &= l_{FbDb} = l_{FcDc} = 2 l_{FD}, \\ l_{FaDb} &= l_{FbDc} = l_{FcDa} = \\ &= l_{FaDc} = l_{FbDa} = l_{FcDb} \cong -l_{FD}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11.3)$$

e) Die Gegeninduktivität zwischen Stator und Rotor:

a) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und den Phasenwicklungen der Rotorwicklung F :

$$\left. \begin{aligned} m_{AaFa} &= m_{AbFb} = m_{AcFc} = m_F \cos \vartheta \\ m_{AaFb} &= m_{AbFc} = m_{AcFa} = m_F \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{AaFc} &= m_{AbFa} = m_{AcFb} = m_F \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11.4)$$

β) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und den Phasenwicklungen der Rotorwicklung D :

$$\left. \begin{aligned} m_{AaDa} &= m_{AbDb} = m_{AcDc} = m_D \cos \vartheta \\ m_{AaDb} &= m_{AbDc} = m_{AcDa} = m_D \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{AaDc} &= m_{AbDa} = m_{AcDb} = m_D \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11.5)$$

Die Ströme und Spannungen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor sind:

a) Die Ströme und Spannungen des Stators:

$$i_{Aa}, i_{Ab}, i_{Ac}; \quad u_{Aa}, u_{Ab}, u_{Ac}.$$

b) Die Ströme und Spannungen des Rotors:

a) Die Ströme und Spannungen der Rotorwicklung F :

$$i_{Fa}, i_{Fb}, i_{Fc}; \quad u_{Fa}, u_{Fb}, u_{Fc}.$$

β) Ströme und Spannungen der Rotorwicklung D :

$$i_{Da}, i_{Db}, i_{Dc}; \quad u_{Da}, u_{Db}, u_{Dc}.$$

Die im Aufsatz angewandten Bezeichnungen der Matrizentheorie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \dots \text{quadratische Matrix aus } a_{ij} \text{ skalaren Elementen.}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots \text{quadratische Hypermatrix aus } \mathbf{A}_{ij} \text{ Blöcken:}$$

\mathbf{A}^* Die konjugiert transponierte Matrix von \mathbf{A}

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \dots \text{Spaltenmatrix aus } a_i \text{ skalaren Elementen.}$$

$$\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \dots, a_m] \quad \dots \text{Zeilenmatrix aus } a_i \text{ skalaren Elementen.}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \dots \text{Hyperspaltenmatrix aus } \mathbf{a}_i \text{ Spaltenmatrixblöcken.}$$

$$\mathbf{C}(c_0, c_1, \dots, c_m) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_m \\ c_m & c_0 & \dots & c_{m-1} \\ . & . & \dots & . \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Zyklische Matrix.}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{B} & a_{12} \mathbf{B} & \dots & a_{1m} \mathbf{B} \\ a_{21} \mathbf{B} & a_{22} \mathbf{B} & \dots & a_{2m} \mathbf{B} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} \mathbf{B} & a_{m2} \mathbf{B} & \dots & a_{mm} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad \dots \text{Direktprodukt.}$$

$|\mathbf{A}|$ Die Determinante von \mathbf{A}

\mathbf{E}_m Einheitsmatrix m -ter Ordnung.

$$\langle d_1, d_2, \dots, d_m \rangle = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & d_m \end{bmatrix} \quad \dots \text{Diagonalmatrix } m\text{-ter Ordnung.}$$

Koeffizientenmatrizen :

Die Koeffizientenmatrizen einer Maschine mit zweiphasigem Rotor sind die folgenden :

Die Widerstandmatrix :

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{R}_{A,3}, \mathbf{R}_{F,2}, \mathbf{R}_{D,2} \rangle;$$

$$\mathbf{R}_{A,3} = r_A \mathbf{E}_3;$$

$$\mathbf{R}_{F2} = \langle r_{Fd}, r_{Fq} \rangle;$$

$$\mathbf{R}_{D,2} = \langle r_{Dd}, r_{Dq} \rangle.$$

Die Induktivitätsmatrix :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{A,3} & \mathbf{M}_{F,3,2} & \mathbf{M}_{D,3,2} \\ \mathbf{M}_{F,2,3}^* & \mathbf{L}_{F,2} & \mathbf{L}_{FD,2} \\ \mathbf{M}_{D,2,3}^* & \mathbf{L}_{FD,2}^* & \mathbf{L}_{D,2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{A,3} = \begin{bmatrix} l_{Aa} & l_{Aab} & l_{Aac} \\ l_{Aab} & l_{Ab} & l_{Abc} \\ l_{Aac} & l_{Abc} & l_{Ac} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{F,2} = \langle l_{Fd}, l_{Fq} \rangle;$$

$$\mathbf{L}_{D,2} = \langle l_{Dd}, l_{Dq} \rangle;$$

$$\mathbf{L}_{FD,2} = \langle l_{FDd}, l_{FDq} \rangle;$$

$$\mathbf{M}_{F,3,2} = \begin{bmatrix} m_{AaFd} & m_{AaFq} \\ m_{AbFd} & m_{AbFq} \\ m_{AcFd} & m_{AcFq} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{D,3,2} = \begin{bmatrix} m_{AaDd} & m_{AaDq} \\ m_{AbDd} & m_{AbDq} \\ m_{AcDd} & m_{AcDq} \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrizen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor sind die folgenden :

Die Widerstandsmatrix :

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{R}_{A,3}, \mathbf{R}_{F,3}, \mathbf{R}_{D,3} \rangle;$$

$$\mathbf{R}_{A,3} = r_A \mathbf{E}_3;$$

$$\mathbf{R}_{F,3} = r_F \mathbf{E}_3;$$

$$\mathbf{R}_{D,3} = r_D \mathbf{E}_3.$$

Die Induktivitätsmatrix :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{A,3} & \mathbf{M}_{F,3} & \mathbf{M}_{D,3} \\ \mathbf{M}_{F,3}^* & \mathbf{L}_{F,3} & \mathbf{L}_{FD,3} \\ \mathbf{M}_{D,3}^* & \mathbf{L}_{FD,3}^* & \mathbf{L}_{D,3} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{A,3} = \mathbf{C}(l_A, -l_{Ag}, -l_{Ag});$$

$$\mathbf{L}_{F,3} = \mathbf{C}(l_F, -l_{Fg}, -l_{Fg});$$

$$\mathbf{L}_{D,3} = \mathbf{C}(l_D, -l_{Dg}, -l_{Dg});$$

$$\mathbf{L}_{FD,3} = l_{FD} \cdot \mathbf{C}(2, -1, -1);$$

$$\mathbf{M}_{F,3} = m_F \cdot \mathbf{C}\left(\cos \vartheta, \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right);$$

$$\mathbf{M}_{D,3} = m_D \cdot \mathbf{C}\left(\cos \vartheta, \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Strom- und Spannungsmatrizen :

Die Strom- und Spannungsmatrizen einer Maschine mit zweiphasigem Rotor :

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_F \\ \mathbf{i}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_A = \begin{bmatrix} i_{Aa} \\ i_{Ab} \\ i_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_F = \begin{bmatrix} i_{Fd} \\ i_{Fq} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_D = \begin{bmatrix} i_{Dd} \\ i_{Dq} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} u_{Aa} \\ u_{Ab} \\ u_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} u_{Fd} \\ u_{Fq} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} u_{Dd} \\ u_{Dq} \end{bmatrix}.$$

Die Strom- und Spannungsmatrizen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor :

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_F \\ \mathbf{i}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_A = \begin{bmatrix} i_{Aa} \\ i_{Ab} \\ i_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_F = \begin{bmatrix} i_{Fa} \\ i_{Fb} \\ i_{Fc} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_D = \begin{bmatrix} i_{Da} \\ i_{Db} \\ i_{Dc} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} u_{Aa} \\ u_{Ab} \\ u_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} u_{Fa} \\ u_{Fb} \\ u_{Fc} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} u_{Da} \\ u_{Db} \\ u_{Dc} \end{bmatrix}.$$

3. Einige im Aufsatz benutzte matrizentheoretische Zusammenhänge

Nehmen wir an, daß sämtliche Blöcke der nur aus quadratischen Blöcken m -ter Ordnung bestehenden Hypermatrix $m \times n$ -ter Ordnung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

zyklische Matrizen sind. In diesem Fall kann ein beliebiger Block

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{0,ij} & a_{1,ij} & \dots & a_{m-1,ij} \\ a_{m-1,ij} & a_{0,ij} & \dots & a_{m-2,ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,ij} & a_{2,ij} & \dots & a_{0,ij} \end{bmatrix}$$

(siehe Literaturnachweis [18] Seite 452) in der kanonischen Form

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \lambda_{v,ij} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_v \\ \vdots \\ \omega_v^{m-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_v, \dots, \bar{\omega}_v^{m-1}] \quad (3.1)$$

dargestellt werden, wo

$$\lambda_{v,ij} = a_{0,ij} + a_{1,ij} \omega_v + \dots + a_{m-1,ij} \omega_v^{m-1}, \quad (3.2)$$

$$\omega_v = e^{\frac{2\pi v j}{m}}.$$

Unter Anwendung der zyklischen Blöcke zur Aufstellung der obigen kanonischen Form kann die Hypermatrix \mathbf{A} natürlich in der folgenden Weise, als eine Summe von Direktprodukten, aufgeschrieben werden:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \lambda_{v,11} & \lambda_{v,12} & \dots & \lambda_{v,1n} \\ \lambda_{v,21} & \lambda_{v,22} & \dots & \lambda_{v,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{v,n1} & \lambda_{v,n2} & \dots & \lambda_{v,nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_v \\ \vdots \\ \omega_v^{m-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_v, \dots, \bar{\omega}_v^{m-1}] \quad (3.3)$$

Da nun die Multiplikation zweier Direktprodukte in der Form

$$(U_1 \times \cdot V_1) (U_2 \times \cdot V_2) = (U_1 U_2) \times \cdot (V_1 V_2)$$

ausgeführt werden kann (vorausgesetzt, daß U_1 und U_2 bzw. V_1 und V_2 in der vorliegenden Reihenfolge konformabel sind), und da ferner

$$\begin{aligned} [1, \omega_\nu, \dots, \omega_\nu^{m-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\mu \\ \vdots \\ \omega_\mu^{m-1} \end{bmatrix} &= 0, \text{ wenn } \mu \neq \nu \text{ ist sowie} \\ [1, \bar{\omega}_\nu, \dots, \bar{\omega}_\nu^{m-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix} &= m \text{ ist, so wird ersichtlich,} \end{aligned}$$

daß eine beliebige analytische Funktion der Hypermatrix A in der folgenden »semikanonischen« Form :

$$f(A) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_{\nu, 11} & \lambda_{\nu, 12} & \dots & \lambda_{\nu, 1n} \\ \lambda_{\nu, 21} & \lambda_{\nu, 22} & \dots & \lambda_{\nu, 2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu, n1} & \lambda_{\nu, n2} & \dots & \lambda_{\nu, nn} \end{bmatrix} \right\} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\omega}_\nu, \dots, \bar{\omega}_\nu^{m-1}] \quad (3.4)$$

bzw. mit Einführung der Abkürzungen :

$$\Lambda_\nu = \begin{bmatrix} \lambda_{\nu, 11} & \lambda_{\nu, 12} & \dots & \lambda_{\nu, 1n} \\ \lambda_{\nu, 21} & \lambda_{\nu, 22} & \dots & \lambda_{\nu, 2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu, n1} & \lambda_{\nu, n2} & \dots & \lambda_{\nu, nn} \end{bmatrix}$$

und

$$w_\nu = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix}$$

in der Schreibweise :

$$(A) \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\Lambda_\nu) \times \cdot w_\nu w_\nu^* \text{ dargestellt werden kann.}$$

4. Die Matrizengleichung elektrischer Wechselstrommaschinen

Wenn wir das Induktionsgesetz bzw. das »zweite« KIRCHHOFFSche Gesetz (siehe Literaturnachweis [20] S. 13 bzw. S. 140) unter Beachtung der in Punkt 2 eingeführten Bezeichnungen verwenden, so können wir die Differentialgleichungssysteme, welche die stationären und transienten Erscheinungen sowohl der synchronen als auch der asynchronen Maschinen beschreiben, in der folgenden »einen gemeinsamen« Matrizengleichung zusammenfassen:

$$\mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\mathbf{L}\mathbf{i}) = \mathbf{u}. \quad (4.1)$$

Da Elemente der Induktivitätsmatrix \mathbf{L} , welche vom Winkel ϑ abhängen, Funktionen der Zeit t sind ($\vartheta = \vartheta(t)$), erhalten wir aus (4.1) nach Vollziehen der Differentiation die folgende Gleichung:

$$\mathbf{R}\mathbf{i} + \left(\frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}\right)\left(\frac{d}{dt}\vartheta\right)\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

Im weiteren werden wir bestrebt sein, die Matrizen-Differentialgleichung der veränderlichen Koeffizienten (4.2) in eine Matrizen-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu transformieren. Zu diesem Zweck suchen wir eine geeignete »Transformierungsmatrix« \mathbf{T} , welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* &= \mathbf{E}; \\ \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}, \mathbf{T}^* \cdot \left(\frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}\right)\mathbf{T}, \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}, \left(\frac{d}{d}\mathbf{T}^*\right)\mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.3)$$

sind alle Matrizen mit konstanten Elementen.

Wenn wir die Gleichung (4.2) von links mit \mathbf{T}^* multiplizieren und die Identität $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{E}$ ausnutzen, so erhalten wir die Gleichung

$$(\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i} + \left(\mathbf{T}^* \cdot \frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L} \cdot \mathbf{T}\right)\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i} \frac{d\vartheta}{dt} + (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T}^* \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u}.$$

Führen wir nun die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}, \\ \mathbf{S} &= \frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}, \mathbf{S}_t = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}, \\ \mathbf{L}_t &= \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}, \\ \mathbf{i}_t &= \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i}, \\ \mathbf{u}_t &= \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ein, so wird

$$\mathbf{T}^* \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i} = \frac{d}{dt} \mathbf{i}_t - \frac{d}{d\vartheta} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}_t \cdot \frac{d}{dt} \vartheta,$$

also erhalten wir die Gleichung:

$$\mathbf{R}_t \cdot \mathbf{i}_t + \left(\mathbf{S}_t - \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{d} t \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} \right) \mathbf{i}_t \frac{d}{dt} \vartheta + \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_t = \mathbf{u}_t. \quad (4.5)$$

Diese Gleichung (4.5) können wir als die allgemeinste Form solcher Matrizen-Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ansehen, welche die Gleichungen der synchronen und asynchronen Maschinen gleichzeitig enthält. — Die Gleichung (4.5) gilt sowohl für Synchronmaschinen mit zweiphasigem als auch mit dreiphasigem Rotor.

Wenn wir die unter *f*) in Punkt 1 angeführten Annahmen als unveränderlich angenommene Winkelgeschwindigkeit $\frac{d}{dt} \vartheta$ mit Ω bezeichnen, so ergibt sich $\vartheta = \Omega t$ und damit

$$\left\{ \mathbf{R}_t + \Omega \left(\mathbf{S}_t - \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} \right) \right\} \mathbf{i}_t + \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_t = \mathbf{u}_t. \quad (4.5.1)$$

Falls (bei Maschinen mit dreiphasigem Rotor) \mathbf{R} und \mathbf{L} nur aus zyklischen Blöcken dritter Ordnung bestehende Hypermatrizen sind, ist es zweckmäßig, die Matrizen \mathbf{R} , \mathbf{L} und $\mathbf{S} = \frac{d}{d\vartheta} \mathbf{L}$ entsprechend (3.3) in »semikanonischer« Form aufzuschreiben sowie die »endliche Fouriersche Reihe« der Säulenmatrizen $\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_F, \mathbf{i}_D$ bzw. $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_F, \mathbf{u}_D$ nach den Eigenvektoren der zyklischen Matrizen $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ aufzustellen. In diesem Falle zerfällt bereits die Gleichung (4.2) in drei voneinander unabhängige Matrizengleichungen, die nur quadratische Matrizen dritter Ordnung bzw. Säulenmatrizen mit drei Elementen enthalten. Diese 3 Matrizen-Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten können für sich in je eine Matrizen-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten transformiert werden; diese Methode benutzen wir in Punkt 6 bei Behandlung der Maschinen mit dreiphasigem Rotor.

5. Matrizengleichung der Maschine mit zweiphasigem symmetrischem Rotor

Im Falle einer elektrischen Maschine mit dreiphasigem Stator und zweiphasigem Rotor können die Koeffizientenmatrizen der in Punkt 4 abgeleiteten Matrizen-Differentialgleichungen (4.2) und (4.5) in dreierlei Blocktypen gegliedert werden: die aus den Widerständen und Induktivitäten der Phasenwicklungen des Stators gebildeten Blöcke sind quadratische Matrizen dritter

Ordnung; die aus den Widerständen und Induktivitäten der beiden Rotorwicklungen gebildeten Blöcke sind quadratische Matrizen zweiter Ordnung; die aus den Gegeninduktivitäten von Stator und Rotor gebildeten Matrizen hingegen sind Rechtecksmatrizen (2 Reihen und 3 Säulen, bzw. 3 Reihen und 2 Säulen). Weiterhin können die Strom- und Spannungsvektoren (Säulenmatrizen) jeweils in eine Säule mit drei Elementen und in eine Säule mit zwei Elementen gegliedert werden.

Es ist zweckmäßig, eine geeignete Transformierungsmatrix aufzustellen, mit deren Hilfe es möglich wird, einerseits die Koeffizientenmatrizen in solche Hypermatrizen zu transformieren, die aus 3×3 quadratischen Blöcken bestehen, andererseits die Strom- und Spannungs-Säulenmatrizen in Säulenmatrizen aus 6 Elementen zu transformieren, die in 2 jeweils aus 3 Elementen bestehende Säulen gegliedert werden können.

Nach Einführung der Rechtecksmatrix

$$\mathbf{T}_{h,3,2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

kann leicht bewiesen werden, daß

$$\mathbf{T}_h^* \cdot \mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$

ist. Weiterhin führen wir die Hypermatrix

$$\mathbf{\Theta}_h = \langle \mathbf{E}_3, \mathbf{T}_h, \mathbf{T}_h \rangle \quad (5.2)$$

ein, so daß

$$\mathbf{\Theta}_h^* \cdot \mathbf{\Theta}_h = \langle \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2 \rangle$$

wird.

Mit Hilfe der in Gleichung (5.2) definierten Matrix kann die Gleichung einer Maschine mit dreiphasigem Stator und zweiphasigem Rotor in eine derartige Matrizen-Differentialgleichung transformiert werden, wo sämtliche Koeffizientenmatrizen aus 3×3 quadratischen Blöcken von jeweils dritter Ordnung bestehen. Ihre Strom- und Spannungs-Säulenmatrizen hingegen enthalten 9 Elemente. Wenn nämlich die Gleichung einer Maschine mit dreiphasigem Stator und zweiphasigem Rotor

$$\mathbf{Ri} + \frac{d}{dt} (\mathbf{Li}) = \mathbf{u} \quad (5.3)$$

ist, so kann diese Gleichung mit Hilfe von Θ_h in die folgende Gleichung transformiert werden :

$$\Theta_h \cdot \mathbf{R} \cdot \Theta_h^* \cdot \Theta_h \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt} (\Theta_h \cdot \mathbf{L} \cdot \Theta_h^* \cdot \Theta_h \cdot \mathbf{i}) = \Theta_h \cdot \mathbf{u} \quad (5.3.1)$$

bzw. können wir nach Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{R}_h = \Theta_h \cdot \mathbf{R} \cdot \Theta_h^*$$

$$\mathbf{L}_h = \Theta_h \cdot \mathbf{L} \cdot \Theta_h^*$$

$$\mathbf{i}_h = \Theta_h \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{u}_h = \Theta_h \cdot \mathbf{u}$$

schreiben :

$$\mathbf{R}_h \cdot \mathbf{i}_h + \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_h \cdot \mathbf{i}_h) = \mathbf{u}_h \quad (5.3.2)$$

Diese Gleichung aber entspricht in ihrer Form bereits dem in Punkt 6 noch näher zu behandelnden Gleichungstyp, so daß sich aus der dort abgeleiteten Lösung \mathbf{i}_h von selbst ergibt und daher

$$\mathbf{i} = \Theta_h^* \cdot \mathbf{i}_h \quad (5.4)$$

wird.

6. Matrizengleichung der Maschine mit dreiphasigem Rotor

Wenn wir die Eigenschaft der Koeffizientenmatrizen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor ausnutzen, wonach nämlich alle Koeffizientenmatrizen zyklisch-quadratische Matrizen dritter Ordnung sind, so können wir die Gleichung (4.2) für den Fall der Maschinen mit dreiphasigem Rotor n folgender Form anschreiben :

$$\sum_{k=0}^2 \left\{ \left[\begin{array}{ccc} r_A & \mu'_{Fk} & \mu'_{Dk} \\ \mu_{Fk}^* & r_F & 0 \\ \mu_{Dk}^* & 0 & r_D \end{array} \right] \times \cdot \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^* \right\} \mathbf{i} + \left\{ \left[\begin{array}{ccc} \lambda_{Ak} & \mu_{Fk} & \mu_{Dk} \\ \mu_{Fk}^* & \lambda_{Fk} & \lambda_{FDk} \\ \mu_{Dk}^* & \lambda_{FDk} & \lambda_{Dk} \end{array} \right] \times \cdot \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^* \right\} \frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{u}, \quad (6.1)$$

wo wir die Bezeichnung der Eigenwerte der zyklischen Blöcke der Koeffizientenmatrizen folgender Tabelle entnehmen können :

| Block : | \mathbf{L}_A | \mathbf{L}_F | \mathbf{L}_D | \mathbf{L}_{FD} | \mathbf{L}_{FD}^* | \mathbf{M}_F | \mathbf{M}_D | \mathbf{M}_F^* | \mathbf{M}_D^* |
|-------------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|---------------------|----------------|----------------|------------------|------------------|
| Der k-te Eingewert : | λ_{Ak} | λ_{Fk} | λ_{Dk} | λ_{FDk} | λ_{FDk}^* | μ_{Fk} | μ_{Dk} | μ_{Fk}^* | μ_{Dk}^* |

Ferner verwenden wir zur Bezeichnung der Eigenwerte der Derivationen nach ϑ bei den von ϑ abhängigen Blöcken folgende schematische Bezeichnungen :

| Block : | \mathbf{M}_F | \mathbf{M}_D | \mathbf{M}_F^* | \mathbf{M}_D^* |
|---|----------------|----------------|------------------|------------------|
| Das Ω -fache des nach ϑ derivierten k -ten Eigenwertes : | μ'_{Fk} | μ'_{Dk} | μ'^*_{Fk} | μ'^*_{Dk} |

Die Eigenwerte der zyklischen Blöcke können nach (3.2) errechnet werden. Die so erhaltenen Eigenwerte fassen wir wie folgt zusammen :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{A0} &= l_A - 2 l_{Ag} \\
 \lambda_{A1} &= \lambda_{A2} = l_A + l_{Ag} \\
 \lambda_{F0} &= l_F - 2 l_{Fg} \\
 \lambda_{F1} &= \lambda_{F2} = l_F + l_{Fg} \\
 \lambda_{D0} &= l_D - 2 l_{Dg} \\
 \lambda_{D1} &= \lambda_{D2} = l_D + l_{Dg} \\
 \lambda_{FD0} &= \lambda_{FD0}^* \cong 0 \\
 \lambda_{FD1} &= \lambda_{FD1}^* = \lambda_{FD2} = \lambda_{FD2}^* = 3 l_{FD}
 \end{aligned}$$

$$\mu_{F0} = \mu_{F0}^* = 0$$

$$\mu_{F1} = \mu_{F2}^* = m_F \left\{ \cos \vartheta + \varepsilon \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) + \varepsilon \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} = \frac{3}{2} e^{j\vartheta} m_F$$

$$\mu_{F2} = \mu_{F1}^* = m_F \left\{ \cos \vartheta + \bar{\varepsilon} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) + \varepsilon \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} = \frac{3}{2} e^{-j\vartheta} m_F$$

$$\mu_{D0} = \mu_{D0}^* = 0$$

$$\mu_{D1} = \mu_{D2}^* = \frac{3}{2} e^{j\vartheta} m_D$$

$$\mu_{D2} = \mu_{D1}^* = \frac{3}{2} e^{-j\vartheta} m_D$$

$$\varepsilon = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

Die gesuchte Funktion $\mathbf{i}(t)$ bzw. die auf der rechten Seite von (6.1) stehende Funktion $\mathbf{u}(t)$ kann in der Form

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_F \\ \mathbf{i}_D \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Aj} \\ \mathbf{i}_{Fj} \\ \mathbf{i}_{Dj} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_j \quad (6.2a)$$

dargestellt werden bzw. in der Form

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^2 \begin{bmatrix} u_{Aj} \\ u_{Fj} \\ u_{Dj} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_j, \quad (6.2b)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} i_{Aj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{i}_A \\ i_{Fj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{i}_F \\ i_{Dj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{i}_D \end{aligned} \right\} \quad (6.3a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} u_{Aj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{u}_A \\ u_{Fj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{u}_F \\ u_{Dj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{u}_D. \end{aligned} \right\} \quad (6.3b)$$

Wenn wir in der Gleichung (6.1) an Stelle von \mathbf{i} bzw. von \mathbf{u} ihre laut den Vektoren $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ entwickelten Darstellungen in der Form von (6.2a) bzw. (6.2b) einsetzen und die Gleichung (6.1) von links her zuerst mit $\mathbf{E}_3 \times \cdot \mathbf{w}_0^*$, sodann mit $\mathbf{E}_3 \times \cdot \mathbf{w}_1^*$ und schließlich mit $\mathbf{E}_3 \times \cdot \mathbf{w}_2^*$ multiplizieren, so zerfällt die Gleichung (6.1) in folgende 3 Matrizengleichungen:

$$\begin{bmatrix} r_A & \mu'_{Fk} & \mu_{Dk} \\ \mu_{Fk}^* & r_F & 0 \\ \mu_{Dk}^* & 0 & r_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Ak} \\ i_{Fk} \\ i_{Dk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{Ak} & \mu_{Fk} & \mu_{Dk} \\ \mu_{Fk}^* & \lambda_{Fk} & \lambda_{FDk} \\ \mu_{Dk}^* & \lambda_{FDk} & \lambda_{Dk} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{Ak} \\ i_{Fk} \\ i_{Dk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Ak} \\ u_{Fk} \\ u_{Dk} \end{bmatrix}; \quad k = 0, 1, 2 \quad (6.4)$$

oder, wenn wir die folgenden Abkürzungen einführen :

$$\mathbf{i}_{(k)} = \begin{bmatrix} i_{Ak} \\ i_{Fk} \\ i_{Dk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(k)} = \begin{bmatrix} u_{Ak} \\ u_{Fk} \\ u_{Dk} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{z}}_0 = \begin{bmatrix} r_A & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 \\ 0 & 0 & r_D \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{z}}_1 = \begin{bmatrix} r_A & j \frac{3}{2} \omega e^{j\vartheta} m_F & j \frac{3}{2} \omega e^{j\vartheta} m_D \\ -j \frac{3}{2} \omega e^{-j\vartheta} m_F & r_F & 0 \\ -j \frac{3}{2} \omega e^{-j\vartheta} m_D & 0 & r_D \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{z}}_2 = \bar{\mathbf{z}}_1^*,$$

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} l_A - 2l_{Ag} & 0 & 0 \\ 0 & l_F - 2l_{Fg} & 0 \\ 0 & 0 & l_D - 2l_{Dg} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} l_A + l_{Ag} & \frac{3}{2} e^{j\vartheta} m_F & \frac{3}{2} e^{j\vartheta} m_D \\ \frac{3}{2} e^{-j\vartheta} m_F & l_F + l_{Fg} & 3l_{FD} \\ \frac{3}{2} e^{-j\vartheta} m_D & 3l_{FD} & l_D + l_{Dg} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1^*$$

so können wir schreiben :

$$\bar{\mathbf{z}}_k \cdot \mathbf{i}_{(k)} + \Lambda_k \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(k)} = \mathbf{u}_{(k)}; \quad k = 0, 1, 2. \quad (6.4.1)$$

Es ist ersichtlich, daß die Matrizendifferentialgleichung mit Index $k = 0$ des Matrizen-Differentialgleichungssystems (6.4.1) konstante Koeffizienten aufweist und von selbst in die folgenden 3 skalaren Differentialgleichungen zerfällt :

$$\left. \begin{aligned} r \cdot i_{A0} + (l_A - 2l_{Ag}) \cdot \frac{d}{dt} i_{A0} &= u_{A0} \\ r \cdot i_{F0} + (l_F - 2l_{Fg}) \cdot \frac{d}{dt} i_{F0} &= u_{F0} \\ r \cdot i_{D0} + (l_D - 2l_{Dg}) \cdot \frac{d}{dt} i_{D0} &= u_{D0} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2.0)$$

Die Matrizen-Differentialgleichungen mit Index $k=1$ und $k=2$ haben veränderliche Koeffizienten. Im Einklang mit dem in Punkt 4 dargelegten allgemeinen Prinzip suchen wir jetzt geeignete Transformierungsmatrizen $\Theta_1 = \Theta$ und $\Theta_2 = \Theta^*$ dritter Ordnung, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \Theta \cdot \Theta^* &= E_3; \\ \Theta^* \cdot \bar{\Sigma}_1 \cdot \Theta, \quad \Theta^* \cdot \Lambda_1 \cdot \Theta \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\vartheta} \Theta^* \cdot \Theta \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

sind alle Matrizen dritter Ordnung mit konstanten Elementen.

Wenn wir eine, die in (6.5) aufgestellten Bedingungen erfüllende Transformierungsmatrix Θ einführen, können wir die Gleichung (6.4.1) im Falle von $k=1$ und $k=2$ folgendermaßen umändern:

$$(\Theta^* \cdot \bar{\Sigma}_1 \cdot \Theta) \Theta^* \cdot \mathbf{i}_{(1)} + (\Theta^* \cdot \Lambda_1 \cdot \Theta) \Theta^* \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)} = \Theta^* \cdot \mathbf{u}_{(1)}, \quad (6.4.2.1)$$

$$(\Theta \cdot \bar{\Sigma}_2 \cdot \Theta^*) \Theta \cdot \mathbf{i}_{(2)} + (\Theta \cdot \Lambda_2 \cdot \Theta^*) \Theta \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(2)} = \Theta \cdot \mathbf{u}_{(2)}. \quad (6.4.2.2)$$

und da

$$\frac{d}{dt} (\Theta^* \cdot \mathbf{i}_{(1)}) = \frac{d}{d\vartheta} \Theta^* \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \mathbf{i}_{(1)} + \Theta^* \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)} \quad (6.6.1)$$

bzw.

$$\left(\frac{d}{dt} \Theta \cdot \mathbf{i}_{(2)} \right) \frac{d}{d\vartheta} \Theta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \mathbf{i}_{(2)} + \Theta \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(2)}, \quad (6.6.2)$$

so führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{1t} &= \Theta^* \cdot \bar{\Sigma}_1 \cdot \Theta \\ \Lambda_{1t} &= \Theta^* \cdot \Lambda_1 \cdot \Theta \\ \mathbf{i}_{(1)t} &= \Theta^* \cdot \mathbf{i}_{(1)} \\ \mathbf{u}_{(1)t} &= \Theta^* \cdot \mathbf{u}_{(1)} \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{2t} &= \Theta \cdot \bar{\Sigma}_2 \cdot \Theta^* \\ \Lambda_{2t} &= \Theta \cdot \Lambda_2 \cdot \Theta^* \\ \mathbf{i}_{(2)t} &= \Theta \cdot \mathbf{i}_{(2)} \\ \mathbf{u}_{(2)t} &= \Theta \cdot \mathbf{u}_{(2)} \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

ein und können dann die Gleichungen (6.4.2.1) bzw. (6.4.2.2) wie folgt schreiben:

$$\left(\bar{z}_{1t} - \Omega \Lambda_{1t} \frac{d\Theta^*}{d\vartheta} \Theta \right) \mathbf{i}_{(1)t} + \Lambda_{1t} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{u}_{(1)t} \quad (6.4.3.1)$$

bzw.

$$\left(\bar{z}_{2t} - \Omega \Lambda_{2t} \frac{d\Theta}{d\vartheta} \Theta^* \right) \mathbf{i}_{(2)t} + \Lambda_{2t} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(2)t} = \mathbf{u}_{(2)t}. \quad (6.4.3.2)$$

Die Bedingungen (6.5) können wir mit einer Diagonalmatrix

$$\Theta = \langle e^{ja\vartheta}, e^{j\beta\vartheta}, e^{j\gamma\vartheta} \rangle \quad (6.8)$$

erfüllen, wo a, β, γ reelle Konstanten bedeuten. Wie aus den Bedingungen (6.5) folgt, müssen die Konstanten a, β, γ folgende Forderungen erfüllen:

$$\beta = \gamma = a - 1. \quad (6.9)$$

Wir können also eine der Konstanten a, β, γ beliebig wählen. Die elektrotechnische Bedeutung der verschiedenartigen Wahl der Konstanten a und $\beta = \gamma$ ergibt sich wie folgt:

a) Im Falle von $a = 0$ und $\beta = \gamma = -1$ bleiben nach der Transformation (6.7) die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« des Statorstromes und der Statorspannung unverändert, und die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« der Rotorströme und Rotorspannungen werden »auf den Stator transformiert«. Diese Transformation kann vorteilhaft verwendet werden, wenn auf den Stator ein elektrisches Netz geschaltet ist.

b) Im Falle von $a = 1$ und $\beta = \gamma = 0$ bleiben nach der Transformation (6.7) die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« der Rotorströme und der Rotorspannungen unverändert, und die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« des Statorstromes und der Statorspannung werden »auf den Rotor transformiert«. Diese Transformation enthält auch die sogenannte PARKSche Transformation [1].

Dem Vorhergehenden entsprechend wird

$$\Theta = \langle e^{ja\vartheta}, e^{j(a-1)\vartheta}, e^{j(a-1)\vartheta} \rangle,$$

also

$$\bar{z}_{1t} = \begin{bmatrix} r_A & j \frac{3}{2} \Omega m_F & j \frac{3}{2} \Omega m_D \\ -j \frac{3}{2} \Omega m_F & r_F & 0 \\ -j \frac{3}{2} \Omega m_D & 0 & r_D \end{bmatrix}, \quad (6.8.1)$$

$$\bar{\Xi}_{2t} = (\bar{\Xi}_{1t})^*, \quad (6.8.2)$$

$$\Lambda_{1t} = \begin{bmatrix} l_A + l_{Ag} & \frac{3}{2} m_F & \frac{3}{2} m_D \\ \frac{3}{2} m_F & l_F + l_{Fg} & 3 l_{FD} \\ \frac{3}{2} m_D & 3 l_{FD} & l_D + l_{Dg} \end{bmatrix} \quad (6.9.1)$$

$$\Lambda_{2t} = \Lambda_{1t} = \Lambda_t, \quad (6.9.2)$$

$$\Lambda_{1t} \frac{d\Theta^*}{d\vartheta} \Theta = -j \begin{bmatrix} \alpha (l_A + l_{Ag}) & \frac{3}{2} (\alpha - 1) m_F & \frac{3}{2} (\alpha - 1) m_D \\ \frac{3}{2} \alpha m_F & (\alpha - 1) (l_F + l_{Fg}) & 3 (\alpha - 1) l_{FD} \\ \frac{3}{2} \alpha m_D & 3 (\alpha - 1) l_{FD} & (\alpha - 1) (l_D + l_{Dg}) \end{bmatrix}, \quad (6.10.1)$$

$$\Theta^* \frac{d\Theta}{d\vartheta} \Lambda_{2t} = \left(\Lambda_{1t} \frac{d\Theta^*}{d\vartheta} \Theta \right)^*. \quad (6.10.2)$$

Wenn wir diese Beziehungen in die Gleichung (6.4.3.1) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{bmatrix} r_A + j \Omega \alpha (l_A + l_{Ag}) & \frac{3}{2} j \Omega \alpha m_F & \frac{3}{2} j \Omega \alpha m_D \\ \frac{3}{2} j \Omega (\alpha - 1) m_F & r_F + j \Omega (\alpha - 1) (l_F + l_{Fg}) & 3 j \Omega (\alpha - 1) l_{FD} \\ \frac{3}{2} j \Omega (\alpha - 1) m_D & \frac{3}{2} j \Omega (\alpha - 1) l_{FD} & r_D + j \Omega (\alpha - 1) (l_D + l_{Dg}) \end{bmatrix} \mathbf{i}_{(1)t} +$$

$$+ \begin{bmatrix} l_A + l_{Ag} & \frac{3}{2} m_F & \frac{3}{2} m_D \\ \frac{3}{2} m_F & l_F + l_{Fg} & 3 l_{FD} \\ \frac{3}{2} m_D & 3 l_{FD} & l_D + l_{Dg} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{u}_{(1)t}. \quad (6.11.1)$$

Um das Obige durch ein einfaches Anwendungsbeispiel vorzuführen nehmen wir an, daß:

$$l_A + l_{Ag} = l_F + l_{Fg} = l_D + l_{Dg} = L; \quad (6.12.1)$$

$$\frac{3}{2} m_F = \frac{3}{2} m_D = 3 l_{FD} = M. \quad (6.12.2)$$

So, können wir unter Berücksichtigung der in den Gleichungen (6.12.1) und (6.12.2) enthaltenen Vernachlässigungen die Gleichung (6.11.1) in der folgenden vereinfachten Form schreiben:

$$\left\{ \langle r_A, r_F, r_D \rangle + j \Omega \begin{bmatrix} L & M & M \\ (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) L & (\alpha - 1) M \\ (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) L \end{bmatrix} \right\} \mathbf{i}_{(1)t} + \mathbf{C}(L, M, M) \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{u}_{(1)t}. \quad (6.13.1)$$

Auf ähnliche Weise können wir aus der Gleichung (6.4.3.2) die folgende Beziehung erhalten:

$$\left\{ \langle r_A, r_F, r_D \rangle - j \Omega \begin{bmatrix} L & M & M \\ (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) L & (\alpha - 1) M \\ (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) L \end{bmatrix} \right\} \mathbf{i}_{(2)t} + \mathbf{C}(L, M, M) \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(2)t} = \mathbf{u}_{(2)t}. \quad (6.13.2)$$

Zunächst wollen wir uns mit der Gleichung (6.13.1) beschäftigen. Wir führen die Transformierungsmatrix

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \\ 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (6.14.1)$$

ein (natürlich ist $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^* = \mathbf{E}$), mit deren Hilfe wir die Gleichung (6.13.1) folgendermaßen schreiben können:

$$\left\{ \mathbf{W} \langle r_A, r_F, r_D \rangle \mathbf{W}^* + j \Omega \mathbf{W} \begin{bmatrix} L & M & M \\ (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) L & (\alpha - 1) M \\ (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) M & (\alpha - 1) L \end{bmatrix} \mathbf{W}^* \right\} \mathbf{W} \mathbf{i}_{(1)t} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{C}(L, M, M) \cdot \mathbf{W}^* \frac{d}{dt} \mathbf{W} \mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{W} \mathbf{u}_{(1)t}.$$

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{(1)s} &= \mathbf{W}\mathbf{i}_{(1)l} \\ \mathbf{u}_{(1)s} &= \mathbf{W}\mathbf{u}_{(1)l}\end{aligned}\quad (6.14.2)$$

und

$$\begin{aligned}R_0 &= r_A + r_F + r_D \\ R_1 &= r_A + \bar{\varepsilon} r_F + \varepsilon r_D \\ R_2 &= r_A + \varepsilon r_F + \bar{\varepsilon} r_D\end{aligned}\quad (6.14.3)$$

erhalten wir aus der Gleichung (6.13.1) die Beziehung

$$\begin{aligned}\left\{ \mathbf{C}(R_0, R_1, R_2) + \frac{j\Omega}{3} \begin{bmatrix} (3\alpha-2)(L+2M) & L-M & L-M \\ L+2M & (3\alpha-2)(L-M) & L-M \\ L+2M & L-M & (3\alpha-2)(L-M) \end{bmatrix} \right\} \mathbf{i}_{(1)s} + \\ + \langle L+2M, L-M, L-M \rangle \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)s} = \mathbf{u}_{(1)s}.\end{aligned}$$

Wenn wir die Gleichung mit der Diagonalmatrix

$$\left\langle \frac{1}{L+2M}, \frac{1}{L-M}, \frac{1}{L-M} \right\rangle$$

multiplizieren und die Bezeichnung

$$\mathbf{u}_{(1)c} = \left\langle \frac{1}{L+2M}, \frac{1}{L-M}, \frac{1}{L-M} \right\rangle \cdot \mathbf{u}_{(1)s} \quad (6.14.4)$$

einführen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{R_0}{L+2M} & \frac{R_1}{L+2M} & \frac{R_2}{L+2M} \\ \frac{R_2}{L-M} & \frac{R_0}{L-M} & \frac{R_1}{L-M} \\ \frac{R_1}{L-M} & \frac{R_2}{L-M} & \frac{R_0}{L-M} \end{bmatrix} + \frac{j\Omega}{3} \begin{bmatrix} 3\alpha-2 & \frac{L-M}{L+2M} & \frac{L-M}{L+2M} \\ \frac{L+2M}{L-M} & 3\alpha-2 & 1 \\ \frac{L+2M}{L-M} & 1 & 3\alpha-2 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{i}_{(1)s} + \\ + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)s} = \mathbf{u}_{(1)c}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Führen wir nun noch die Transformierungsmatrix

$$\Delta = \left\langle \frac{L+2M}{L-M}, \frac{L-M}{L+2M}, \frac{L-M}{L+2M} \right\rangle$$

ein und verwenden die folgenden kurzen Bezeichnungen :

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \mathbf{i}_{(1)s} &= \mathbf{i}_{(1)\sigma} \\ \Delta \cdot \mathbf{u}_{(1)c} &= \mathbf{u}_{(1)\sigma}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

so können wir mit ihrer Hilfe die Gleichung (6.15) folgendermaßen abändern :

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{R_0}{L+2M} & \frac{R_1}{L-M} & \frac{R_2}{L-M} \\ \frac{R_2}{L+2M} & \frac{R_0}{L-M} & \frac{R_1}{L-M} \\ \frac{R_1}{L+2M} & \frac{R_2}{L-M} & \frac{R_0}{L-M} \end{bmatrix} + \frac{j\Omega}{3} \mathbf{C}(3\alpha-2, 1, 1) \right\} \mathbf{i}_{(1)\sigma} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\sigma} = \mathbf{u}_{(1)\sigma}. \quad (6.17)$$

Wenn wir jetzt die Gleichung (6.17) mit der Matrix \mathbf{W}^* von links her multiplizieren und

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(1)\tau} &= \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{i}_{(1)\sigma} \\ \mathbf{u}_{(1)\tau} &= \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{u}_{(1)\sigma} \end{aligned} \quad (6.18)$$

eingeführen, erhalten wir aus (6.17) die Gleichung :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} & -\frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & -\frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ -\frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & \frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} & -\frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ -\frac{r_0}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & -\frac{r_0}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & \frac{r_0}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + j\Omega \langle \alpha, \alpha-1, \alpha-1 \rangle \right\} \mathbf{i}_{(1)\tau} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\tau} = \mathbf{u}_{(1)\tau}. \quad (6.19)$$

Führen wir noch die Transformierungsmatrix

$$\mathbf{H} = \langle \sqrt{r_F r_D}, \sqrt{r_A r_D}, \sqrt{r_A r_F} \rangle$$

und die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(1)\omega} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_{(1)\tau} \\ \mathbf{u}_{(1)\omega} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_{(1)\tau} \end{aligned} \quad (6.20)$$

ein und multiplizieren die Gleichung (6.19) von links her mit \mathbf{H} , so gelangen wir unter Anwendung der Identität $\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E}$ zur nachfolgenden Gleichung (in dieser ist das erste Glied des Koeffizienten $\mathbf{i}_{(1)\tau}$ bereits eine symmetrische Matrix, da wir ja das erste Glied des Koeffizienten $\mathbf{i}_{(1)\omega}$ in der Gleichung (6.19) von links her mit \mathbf{H} und von rechts her mit \mathbf{H}^{-1} multipliziert haben):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} - \frac{\sqrt{r_A r_F}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} - \frac{\sqrt{r_A r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ & - \frac{\sqrt{r_A r_F}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} - \frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} - \frac{\sqrt{r_F r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ & - \frac{\sqrt{r_A r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} - \frac{\sqrt{r_F r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} - \frac{r_D}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} \end{aligned} \right\} +$$

$$+ j\Omega \langle \alpha, \alpha-1, \alpha-1, \rangle \left\{ \mathbf{i}_{(1)\omega} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\omega} = \mathbf{u}_{(1)\omega} \right. \quad (6.21)$$

Untersuchen wir jetzt den Fall $\alpha = 1$, der die sogenannte PARKSche Transformation enthält [1]. In diesem Fall können wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{i}_{(1)}$ auf folgende Weise gewinnen:

Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix unter der Annahme, daß $r_A = 0$ und $r_F \neq r_D$ ist. Dabei bezeichnen wir die Eigenwerte mit $\nu_i^{(0)}$ und die Eigenvektoren mit $\mathbf{e}_i^{(0)}$, und erhalten:

$$\begin{aligned} \nu_1^{(0)} &= j\Omega; \\ \nu_2^{(0)} &= \left(\frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{1+\xi}{2} + \frac{r_D}{L-M} \cdot \frac{1-\xi}{2} \right) \frac{L+M}{L+2M}; \\ \xi &= \sqrt{1 + \left(\frac{M}{L+M} \right)^2 \frac{4r_F r_D}{(r_F - r_D)^2}}; \\ \nu_3^{(0)} &= \left(\frac{r_D}{L-M} \cdot \frac{1+\xi}{2} + \frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{1-\xi}{2} \right) \frac{L+M}{L+2M}; \end{aligned} \quad (6.22)$$

sowie

$$\mathbf{e}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.23)$$

$$\mathbf{c}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi + 1} \end{bmatrix} \kappa; \mathbf{c}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi + 1} \\ 1 \end{bmatrix} \kappa; \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2 - 1}{(\xi + 1)^2}}}.$$

Im Falle wenn $r_A \neq 0$, ($r_F \neq r_D$), aber r_A im Verhältnis zu r_F und r_D einen verhältnismäßig kleinen Wert darstellt, können die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix in der Form

$$v_1 = v_1^{(0)} + \Delta v_1$$

$$v_2 = v_2^{(0)} + \Delta v_2$$

$$v_3 = v_3^{(0)} + \Delta v_3$$

gesucht werden. In diesem Falle können für Δv_i die folgenden annähernd genauen Gleichungen gewonnen werden:

$$\Delta v_1 \cong \frac{r_A}{L - M} \frac{L + M}{L + 2M} - j\Omega \frac{r_A (r_D - r_F)}{\Omega^2 (L - M)^2} \left(\frac{L + M}{L + 2M} \right)^2 \xi$$

$$\Delta v_2 \cong j\Omega \frac{r_A}{\Omega^2 (L - M)^2} \left[\frac{(r_F + r_D)^2 \cdot L}{2(r_D - r_F)(L + 2M)\xi} - \frac{r_F r_D (L - M)}{(r_D - r_F)(L + 2M)\xi} - \frac{(r_F + r_D)L}{2(L + 2M)} \right].$$

$$\Delta v_3 = -\Delta v_2$$

(Den Wert von ξ siehe weiter oben.)

Wenn wir die imaginären Glieder im Verhältnis zu den reellen Gliedern vernachlässigen, erzielen wir für die Eigenvektoren folgende Näherungsgleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &\cong v_1^{(0)} + \frac{r_A (L + M)}{(L - M)(L + 2M)} \\ v_2 &\cong v_2^{(0)} \\ v_3 &\cong v_3^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

In diesem Falle erhalten wir (abgesehen von kleinen Größen zweiter bzw. höherer Ordnung) für die Eigenvektoren die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &\cong \mathbf{c}_1^{(0)} \\ \mathbf{c}_2 &\cong \mathbf{c}_2^{(0)} \\ \mathbf{c}_3 &\cong \mathbf{c}_3^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Im Falle, wenn $r_A \neq 0$, aber $r_F = r_D = R$ ist, können wir die Eigenwerte der in der Gleichung (6.21) vorkommenden Koeffizientenmatrix $\mathbf{i}_{(1)\omega}$ wie folgt erhalten (es ist zweckmäßig, den unmittelbar errechenbaren Eigenwert mit ν_3 zu bezeichnen): $\nu_3 = \frac{R}{L-M}$; (6.26.1)

die Eigenwerte ν_1 und ν_2 sind hingegen die Wurzeln der Gleichung

$$\nu^2 - \left(j\Omega + \frac{r_A(L+M)}{(L-M)(L+2M)} + \frac{R \cdot L}{(L-M)(L+2M)} \right) \nu + \\ + j\Omega \frac{R \cdot L}{(L-M)(L+2M)} + \frac{r_A R (L-M)}{(L-M)^2 (L+2M)} = 0. \quad (6.26.2)$$

Wie oben untersuchen wir zunächst den Fall $r_A = 0$. Dabei ergeben sich die Eigenwerte in derselben Reihenfolge wie vorhin:

$$\begin{aligned} \nu_1^{(0)} &= j\Omega \\ \nu_2^{(0)} &= \frac{R \cdot L}{(L-M)(L+2M)}; \\ \nu_3^{(0)} &= \frac{R}{L-M} \end{aligned} \quad (6.27)$$

die Eigenvektoren jedoch erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_3^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Wenn $r_A \neq 0$, aber der Wert von r_A gegenüber den Werten von $r_F = r_D = R$ ein verhältnismäßig kleiner Wert ist, verändert sich der Eigenwert ν_3 nicht, die Eigenwerte ν_1 und ν_2 jedoch können wir gleichfalls in folgender Form suchen:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_1^{(0)} + \Delta \nu_1 \\ \nu_2 &= \nu_2^{(0)} + \Delta \nu_2 \end{aligned} \quad (6.29.1)$$

und erzielen dadurch, daß

$$\Delta v_1 = \frac{\frac{r_A \cdot L}{(L-M)(L+2M)} - \frac{j\Omega r_A R(L-M)}{\Omega^2(L-M)^2(L+2M)}}{1 + j\Omega \frac{R \cdot L}{\Omega^2(L-M)(L+2M)}} \quad (6.29.2)$$

$$\Delta v_2 = j\Omega \frac{r_A RM(L-M)}{\Omega^2(L-M)(L+2M)^2 \left(1 + j\Omega \frac{RL}{\Omega^2(L-M)(L+2M)} \right)}$$

wird bzw. wie oben unter Vernachlässigung der imaginären Glieder

$$\Delta v_1 = \frac{r_A(L+M)}{(L-M)(L+2M)}$$

$$\Delta v_2 = 0, \quad (6.29.3)$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + \gamma^2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

wo der Wert der Konstante γ als eine Wurzel der folgenden Gleichung zweiten Grades erscheint :

$$\frac{\sqrt{r_A R}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \gamma^2 + \left(j\Omega + \frac{(r_A - R)(L+M)}{(L-M)(L+2M)} + \frac{RM}{(L-M)(L+2M)} \right) \gamma - \frac{2\sqrt{r_A R}}{L-M} \frac{M}{L+2M} = 0. \quad (6.31)$$

Sobald die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der Gleichung (6.21) bekannt sind, kann die Gleichung (6.21) in der folgenden Form geschrieben werden :

$$[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3] \langle \nu_1, \nu_2, \nu_3 \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \mathbf{c}_2^* \\ \mathbf{c}_3^* \end{bmatrix} \mathbf{i}_{(1)\omega} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\omega} = \mathbf{u}_{(1)\omega}$$

bzw. von links her mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \mathbf{c}_2^* \\ \mathbf{c}_3^* \end{bmatrix} = \mathbf{S}^*$$

multipliziert :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* \mathbf{i}_{(1)\omega} &= \langle e^{-\nu_1 t}, e^{-\nu_2 t}, e^{-\nu_3 t} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{i}_{(1)\omega, 0} + \\ &+ \int_0^t \langle e^{-\nu_1(t-\tau)}, e^{-\nu_2(t-\tau)}, e^{-\nu_3(t-\tau)} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{u}_{(1)\omega}(\tau) d(\tau). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Da wir aber $\mathbf{i}_{(1)\omega}$ aus der eigentlichen Unbekannten, nämlich aus $\mathbf{i}_{(i)}$, durch die Transformationen (6.7.1), (6.14.2), (6.18) und (6.20) gewonnen haben, können wir unter Einführung der Abkürzung

$$\sigma = \frac{L - M}{L + 2M} \quad (6.33)$$

schreiben :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(1)} &= \langle e^{j\theta}, 1, 1 \rangle \mathbf{W}^* \left\langle \sqrt{\sigma}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\rangle \mathbf{W} \left\langle \frac{1}{\sqrt{r_F r_D}}, \frac{1}{\sqrt{r_A r_D}}, \frac{1}{\sqrt{r_A r_F}} \right\rangle \mathbf{i}_{(1)\omega} = \\ &= \mathbf{D} \mathbf{i}_{(1)\omega} \end{aligned} \quad (6.34.1)$$

und ferner, gleichfalls unter Berücksichtigung der Transformationen (6.7.1), (6.14.2), (6.18) und (6.20) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(1)\omega} &= \langle \sqrt{r_F r_D}, \sqrt{r_A r_D}, \sqrt{r_A r_F} \rangle \mathbf{W} \left\langle \sqrt{\sigma}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\rangle \\ &\left\langle \frac{1}{L + 2M}, \frac{1}{L - M}, \frac{1}{L - M} \right\rangle \mathbf{W}^* \langle e^{j\theta}, 1, 1 \rangle \mathbf{u}_{(1)} = \mathbf{G} \mathbf{u}_{(1)}. \end{aligned} \quad (6.34.2)$$

Unter Verwendung der Beziehungen (6.34.1) und (6.34.2) ergibt sich :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(1)} &= \mathbf{D} \mathbf{S} \langle e^{-\nu_1 t}, e^{-\nu_2 t}, e^{-\nu_3 t} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{i}_{(1), 0} + \\ &+ \int_0^t \mathbf{D} \mathbf{S} \langle e^{-\nu_1(t-\tau)}, e^{-\nu_2(t-\tau)}, e^{-\nu_3(t-\tau)} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{G} \mathbf{u}_{(1)}(\tau) d(\tau). \end{aligned}$$

Durch Einführung der Abkürzungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{S} \langle e^{-\nu_F t}, e^{-\nu_D t}, e^{-\nu_A t} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{-1} \quad (6.34.1)$$

und

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{S} \langle e^{-\nu_F(t-\tau)}, e^{-\nu_D(t-\tau)}, e^{-\nu_A(t-\tau)} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{G} \quad (6.34.2)$$

erhalten wir

$$\mathbf{i}_{(1)} = \mathbf{F}\mathbf{i}_{(1),0} + \int_0^t \mathbf{Y}\mathbf{u}_{(1)}(\tau) d(\tau). \quad (6.35)$$

Auf Grund von (6.33) sowie von (6.34.1) und (6.34.2) finden wir :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3\sqrt{\sigma}} \begin{bmatrix} \frac{2+\sigma}{\sqrt{r_F r_D}} e^{j\theta} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_D}} e^{j\theta} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_F}} e^{j\theta} \\ \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_F r_D}} & \frac{2+\sigma}{\sqrt{r_A r_D}} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_F}} \\ \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_F r_D}} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_D}} & \frac{2+\sigma}{\sqrt{r_A r_F}} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3\sqrt{\sigma}} \begin{bmatrix} (1+2\sigma) & \sqrt{r_F r_D} e^{-j\theta} & (1-\sigma) & \sqrt{r_F r_D} & (1-\sigma)\sqrt{r_F r_D} \\ (1-\sigma) & \sqrt{r_A r_D} e^{j\theta} & (1+2\sigma) & \sqrt{r_A r_D} & (1-\sigma)\sqrt{r_A r_D} \\ (1-\sigma) & \sqrt{r_A r_F} e^{-j\theta} & (1-\sigma) & \sqrt{r_A r_F} & (1+2\sigma)\sqrt{r_A r_F} \end{bmatrix}$$

sowie :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{(L+2M)(L-M)}} \langle e^{-j\theta}, 1, 1 \rangle.$$

Im weiteren beschränken wir uns auf den Fall, daß $r_A \neq 0$, aber der Wert von r_A gegenüber den Werten von r_F und r_D verhältnismäßig klein ist. Dann ergibt sich auf Grund der Gleichungen (6.23) und (6.25) :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \eta \\ 0 & -\eta & \xi \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta + 1)^2}}} \quad (6.36)$$

$$\eta = \frac{\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(\zeta + 1)}}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta + 1)^2}}}.$$

Zusammenfassung

Zweck vorliegender Arbeit ist die Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge von elektrischen Dreiphasenmaschinen durch Anwendung einiger neuerer Ergebnisse der Matrizen-theorie.

Die Differentialgleichungen der Stator- bzw. Rotorwicklungen der Wechselstrommaschinen sind im Falle konstanter Drehzahl in eine lineare Matrizen-differentialgleichung mit *variabler* Koeffizientenmatrix zusammenfaßbar [s. (4.2.)]. Die Matrizen-differentialgleichung ist durch Anwendung der in (4.3) definierten Transformationsmatrix T in eine Matrizen-differentialgleichung mit *konstanter* Koeffizientenmatrix transformierbar [s. (4.5) bzw. (4.5.1)]. Die Lösung dieser Matrizen-differentialgleichung ist in einer früheren Arbeit eines der Autoren gegeben. Im Falle einer räumlichen zyklischen Symmetrie der Wicklungen sind die Lösungsformeln zur numerischen Berechnung besonders geeignet.

Literatur

1. PARK, R. H.: »Two-Reaction Theory of Synchronous Machines«. Part I.: A. I. E. E. Trans. **48**, 716 (1929); Part II.: A. I. E. E. Trans. **362** (1933) S. 2, Cl. (6) u. (7).
2. LAIBLE, TH.: Die Theorie der Synchronmaschine in nichtstationärem Betrieb. Berlin 1952.
3. CONCORDIA, CH.: Synchronous Machines Theory and Performance. New York 1956.
4. GORJEW, A. A.: Ausgleichsvorgänge in elektrischen Maschinen. 1951.
5. WENIKOW, W. A.—SCHUKOW, L. A.: Ausgleichsvorgänge in elektrischen Systemen. Berlin 1956.
6. KOVÁCS, K. P.—RÁCZ, I.: Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai (Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen). Budapest 1954.
7. KRON, G.: A short course in tensor analysis for electrical engineers. New York 1952.
8. FRAUENBERGER, L.: Beitrag zur Theorie von Dreiphasentransformatoren ohne Nulleiterstrom im stationären Betrieb und bei Einschwingvorgängen. Elektrotechnik und Maschinenbau. **58**, 293 (1940).
9. SHEN, D. W. C.: Generalized coordinates in substitutive networks. Journal of Theor. Exp. and Appl. Physics, **39**, 870 (1948).
10. ЯАНКО-ТРИНИЦКИЙ: Уравнения периодных электромагнитных процессов асинхронного двигателя и их решения (Электричество, 1951, № 3).
11. KUCERA, J.: Les repères tournants dans l'analyse tensorielle des machines électriques. Revue Général de l'Électricité, Paris. **61**, No. 7, S. 1 (1952).
12. LOVASS-NAGY, V.—GYÖRY, T.: »Csatolt rezgőkörök matematikai vizsgálatá a matrix-számítás segítségével« (»Die mathematische Untersuchung von gekoppelten Schwingungskreisen mit Hilfe der Matrizenrechnung«). Mitteilungen des Institutes für angewandte Mathematik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, **3**, 65 (1954).
13. KRON, G.: »Tearing and interconnecting as a form of transformation«. Quarterly of Applied Mathematics, New York. **13**, 147 (1955).
14. FORTET, R.: »Vecteurs, matrices et déterminants, tenseurs.« Bulletin de la Société Française des Électriciens, Paris. **5**, 710 (1955).
15. LOVASS-NAGY, V.: »On an Application of Egerváry's Hypermatrixalgorism to the Mathematical Investigation of Polyphase Transformers«. Acta Technica Acad. Sc. Hung. **15**, 261 (1956).
16. LOVASS-NAGY, V.: »A matrix-elmélet néhány újabb eredményének alkalmazása villamos transzformátorok matematikai vizsgálatára« (»Über die Anwendung einiger neuerer Ergebnisse der Matrizen-theorie zur mathematischen Untersuchung elektrischer Transformatoren«). Wissenschaftliche Tagung der Techn. Universität für Bau- und Verkehrswesen, 11—12. Nov. 1955. Im Druck erschienen: 1957.
17. LOVASS-NAGY, V.—SZENDY, CH.: »Application of the Matrix Calculus to the Investigation of Transformers in Arbitrary Connection«. Acta Technica Acad. Sc. Hung. **16**, 311 (1957).
18. EGERVÁRY, J.: »Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról« (»Über die kanonische Darstellung von Matrixfunktionen«). A M. Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei (Mitteilungen der III. Klasse der Ung. Akad. d. Wiss.) **3**, 451 (1953).

19. EGERVÁRY, E. »On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, **15**, 211 (1954).
20. SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik. S. 13. bzw. 140, Leipzig 1949.

| | | |
|-------------------------------------|---|--|
| <p>V. LOVASS-NAGY K. SZENDY</p> | } | <p>Budapest, XI., Budafoki út 4—6, Ungarn.</p> |
|-------------------------------------|---|--|

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1958. VI. 26. — Terjedelem: 8,25 (A/5) fv, 55 ábra

Akadémiai nyomda, Budapest, Gerlőczy u 2. — 46090/58 — Felelős vezető: Bernát György

A Budapesti Műszaki Egyetem Periodica Polytechnica címen idegen nyelvű tudományos folyóiratot indított. A folyóirat három sorozatban — vegyészeti, villamossági, valamint gépész- és általános mérnöki sorozatban — jelenik meg, évente négyszer, sorozatonként egy-egy kötetben. Az egyes kötetek terjedelme 14—18 ív.

A Periodica Polytechnicában megjelenő tanulmányok szerzői az Egyetem tanári karából és tudományos dolgozóiból kerülnek ki. Főszerkesztő Dr. Csűrös Zoltán egyetemi tanár, akadémikus.

A folyóirat előfizetési ára sorozatonként és kötetenként 60,— Ft. Megrendelhető az Akadémiai Kiadónál (Budapest 62, Postafiók 440. NB. egyszámlaszám: 05-915-111-44), a külföld számára pedig a Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Bp. 62, Postafiók 149. NB. egyszámlaszám: 43-790-057-181), illetve a vállalat külföldi képviselőiteinél és bizományosainál.

INDEX

| | |
|--|-----|
| RETTER, J.: Die Berechnung der Läuferstäbe von Strom- verdrängungsmotoren | 167 |
| BÁRÁNY, N.: Mirror Micrometers | 205 |
| LOVASS-NAGY, V.—SZENDY, K.: Mathematische Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge in elektri- schen Dreiphasenmaschinen mit Hilfe von Hyper- matrizen | 229 |